Ответы для варианта 29527688

Задание №1 решение и ответ:

Разделим 13 230 на 0,42:

$$\frac{13230}{0,42}=\frac{13230\cdot 100}{42}=31500.$$

Значит, всего в этом городе — 31 500 выпускников.

Ответ: 31 500.

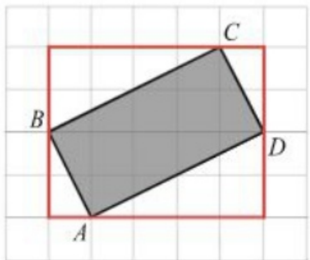
Задание №2 решение и ответ:

Из графика видно, что 23 января наибольшая температура составляла −13 °C, а наименьшая −22 °C. Их разность составляет 9 °C. Ответ: 9.

Задание №3 решение и ответ:

Найдите площадь прямоугольника, изображенного на клетчатой бумаге с размером клетки 1 см × 1 см (см. рис.). Ответ дайте в квадратных сантиметрах.

Площадь прямоугольника равна разности площади прямоугольника и четырех прямоугольных треугольников, гипотенузы которых являются сторонами исходного прямоугольника. Поэтому



$$S=5\cdot 4-\frac{1}{2}\cdot 2\cdot 4-\frac{1}{2}\cdot 2\cdot 4-\frac{1}{2}\cdot 1\cdot 2-\frac{1}{2}\cdot 1\cdot 2=10\text{ см}^2.$$

Ответ: 10.

Задание №4 решение и ответ:

Всего в соревнованиях принимает участие 4 + 7 + 9 + 5 = 25 спортсменов. Значит, вероятность того, что спортсмен, который выступает последним, окажется из Швеции, равна

$$\frac{9}{25}=0,36.$$

Ответ: 0,36.

Задание №5 решение и ответ:

Возведем в квадрат:

$$\sqrt{\frac{1}{5-2x}}=\frac{1}{3}\Leftrightarrow\frac{1}{5-2x}=\frac{1}{9}\Leftrightarrow 5-2x=9\Leftrightarrow x=-2.$$

Ответ: −2.

Задание №6 решение и ответ:

$\angle CBE=\angle BEA$ и $\angle BCE=\angle CED$ как углы при параллельных прямых, значит, треугольники ABE и ECD – равнобедренные.

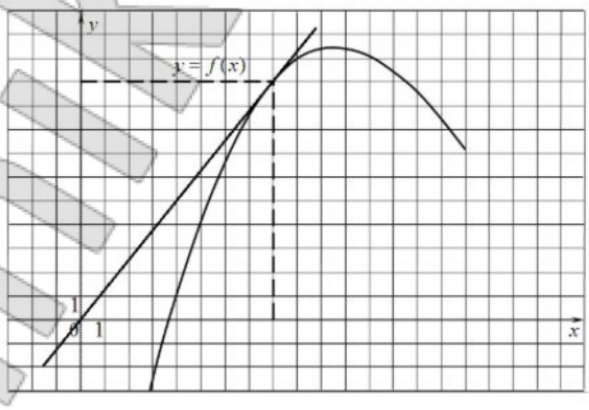
$$AD=AE+ED=AB+CD=2AB=10.$$

Ответ: 10.

Задание №7 решение и ответ:

Поскольку касательная проходит через начало координат, её уравнение имеет вид $y=kx$. Эта прямая проходит через точку (8; 10), поэтому $10=8\cdot k$, откуда $k=1{,}25$. Поскольку угловой коэффициент касательной равен значению производной в точке касания, получаем: $f'(8)=1{,}25$.

Ответ: 1,25.



Задание №8 решение и ответ:

Площадь боковых граней отсеченной призмы вдвое меньше соответствующих площадей боковых граней исходной призмы. Поэтому площадь боковой поверхности отсеченной призмы вдвое меньше площади боковой поверхности исходной. Ответ: 12.

Задание №9 решение и ответ:

Выполним преобразования:

$$\frac{2a+5b}{5a+2b}=1\Leftrightarrow 2a+5b=5a+2b\Leftrightarrow 3a=3b\Leftrightarrow\frac{a}{b}=1.$$

Ответ: 1.

Задание №10 решение и ответ:

Задача сводится к решению неравенства $A \geq 2000$ на интервале $(0°;\ 90°)$ при заданных значениях силы $F = 80$ кН и длины пути $S = 50$ м:

$$A \geq 2000 \Leftrightarrow 80 \cdot 50 \cdot \cos\alpha \geq 2000 \Leftrightarrow \cos\alpha \geq \frac{1}{2} \underset{0°<\alpha<90°}{\Leftrightarrow} 0° < \alpha \leq 60°.$$

Ответ: 60.

Задание №11 решение и ответ:

В первый день Вася решил $a_1 = 5$ задач, в последний — a_{14} задач. Всего надо решить $S_{14} = 434$ задач. Поскольку $S_n = \frac{a_1 + a_n}{2} n$, где $a_1 = 5, n = 14$ имеем:

$$S_{14} = \frac{a_1 + a_{14}}{2} \cdot 14 = 7(5 + a_{14}).$$

Тогда

$$7(5 + a_{14}) = 434 \Leftrightarrow 5 + a_{14} = 62 \Leftrightarrow a_{14} = 57 \text{ задач}.$$

Ответ: 57.

Задание №12 решение и ответ:

Найдем производную заданной функции:

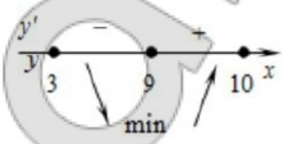
$$y' = \left((8-x)e^{9-x}\right)' = (8-x)'e^{9-x} + (8-x)(e^{9-x})' =$$

$$= -(8-x)e^{9-x} - e^{9-x} = (x-9)e^{9-x}.$$

Найдем нули производной:

$$\begin{cases} (x-9)e^{9-x} = 0, \\ 3 \leq x \leq 10. \end{cases} \Leftrightarrow x = 9.$$

Определим знаки производной функции и изобразим на рисунке поведение функции:



В точке $x = 9$ заданная функция имеет минимум, являющийся ее наименьшим значением на заданном отрезке. Найдем это наименьшее значение: $y(9) = -1 \cdot 1 = -1$.

Ответ: −1.

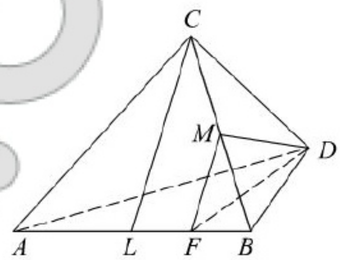
Задание №13 решение и ответ:

Левая часть уравнения имеет смысл при $\sin x < 0$.

Если $\log_{11}(-\sin x) = 0$, то $\sin x = -1$, откуда $x = -\dfrac{\pi}{2} + 2\pi k,\ k \in \mathbb{Z}$.

Если $\log_{11}(-\sin x) \neq 0$, то $2\cos^2 x - 5\cos x + 2 = 0$, откуда $\cos x = 2$ или $\cos x = \dfrac{1}{2}$.
Уравнение $\cos x = 2$ не имеет решений.
Уравнение $\cos x = \dfrac{1}{2}$ имеет корни $x = \pm\dfrac{\pi}{3} + 2\pi k,\ k \in \mathbb{Z}$. Учитывая, что $\sin x < 0$, получаем: $x = -\dfrac{\pi}{3} + 2\pi k,\ k \in \mathbb{Z}$.
Ответ: $\left\{-\dfrac{\pi}{2} + 2\pi k, -\dfrac{\pi}{3} + 2\pi k : k \in \mathbb{Z}\right\}$.

Задание №14 решение и ответ:



а) Пусть MF прямая параллельная прямой CL и F точка ее пересечения с AB. Тогда плоскость DMF параллельна прямой CL по признаку параллельности прямой и плоскости. MF — средняя линия треугольника BCL, поэтому: $BF = \dfrac{1}{2}BL = \dfrac{1}{4}$. Это и требовалось доказать.

б) Искомый угол между прямыми DM и CL равен углу DMF. Обозначим угол DMF буквой α. $MF = \dfrac{1}{2}CL = \dfrac{\sqrt{3}}{4}$

Выразим квадрат отрезка DF по теореме косинусов в двух треугольниках: DMF и BDF:

$$DF^2 = DM^2 + MF^2 - 2DM \cdot MF\cos\alpha = BD^2 + BF^2 - 2BD \cdot BF\cos 60^\circ.$$

Поскольку $DM = \dfrac{\sqrt{3}}{2}$ и $BD = 1$, подставляя числовые данные, получим:

$$\frac{3}{4} + \frac{3}{16} - 2 \cdot \frac{\sqrt{3}}{2} \cdot \frac{\sqrt{3}}{4}\cos\alpha = 1 + \frac{1}{16} - 2 \cdot \frac{1}{4} \cdot \frac{1}{2}.$$

Откуда $\cos\alpha = \dfrac{1}{6}$.

Ответ: $\arccos\dfrac{1}{6}$.

Задание №15 решение и ответ:

Пусть $y = 2^x - 1$, тогда $x = \log_2(y+1)$, и неравенство принимает вид

$$\frac{\log_4 y}{\log_2(y+1) - 1} \leq 1 \Leftrightarrow \frac{\log_4 y - \log_2(y+1) + 1}{\log_2(y+1) - 1} \leq 0 \Leftrightarrow \frac{\log_4 \frac{4y}{(y+1)^2}}{\log_2 \frac{y+1}{2}} \leq 0.$$

Перейдём к системе неравенств:

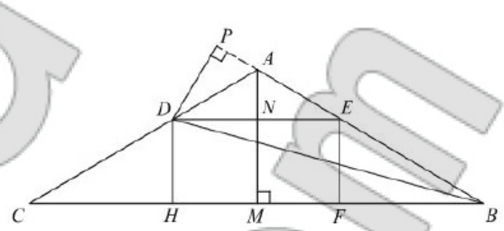
$$\begin{cases} \dfrac{\frac{4y}{(y+1)^2} - 1}{\frac{y+1}{2} - 1} \leq 0, \\ y+1 > 0, \\ y > 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} -\dfrac{y^2 - 2y + 1}{(y+1)^2(y-1)} \leq 0, \\ y > 0. \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \dfrac{(y-1)^2}{(y+1)^2(y-1)} \geq 0, \\ y > 0. \end{cases} \Leftrightarrow y > 1.$$

Вернёмся к исходной переменной, тогда: $2^x - 1 > 1 \Leftrightarrow 2^x > 2 \Leftrightarrow x > 1$.

Ответ: $(1;\ +\infty)$.

Задание №16 решение и ответ:

а) Пусть P — основание перпендикуляра, опущенного из точки D на прямую AB, тогда $DH = DP$.



В равнобедренном треугольнике EAD, $\angle AED = 30°$.

В прямоугольном треугольнике EPD, $DP = \frac{1}{2}DE$, откуда получаем, что $FH = 2DH$.

б) Пусть AM — высота треугольника ABC — пересекает ED в точке N.

Тогда

$$AM = AB \cdot \sin\angle ABC = 2,\ BC = 2AB \cdot \cos\angle ABC = 4\sqrt{3}.$$

Пусть $DH = EF = x$, тогда $FH = ED = 2x$. Треугольники ABC и AED подобны, следовательно,

$$\frac{AN}{AM} = \frac{ED}{BC} \Leftrightarrow \frac{2-x}{2} = \frac{2x}{4\sqrt{3}} \Leftrightarrow x = 3-\sqrt{3}.$$

Значит, площадь прямоугольника $DEFH$ равна

$$DE \cdot DH = 2x \cdot x = 2(3-\sqrt{3})^2 = 24 - 12\sqrt{3}.$$

Ответ: $24 - 12\sqrt{3}$.

Задание №17 решение и ответ:

Чтобы прибыль за три года была не меньше 78 млн руб. необходимо, чтобы ежегодная прибыль была не меньше 26 млн руб., то есть, чтобы выполнялось неравенство

$$px - (0,5x^2 + 2x + 6) \geq 26,$$

откуда, используя неравенство между средним арифметическим и средним геометрическим, получаем:

$$p \geq \frac{0,5x^2 + 2x + 32}{x} = 0,5x + \frac{32}{x} + 2 \geq 2\sqrt{0,5x \cdot \frac{32}{x}} + 2 = 2\sqrt{16} + 2 = 10.$$

Удостоверимся, что это значение параметра достигается, то есть существует количество продукции x, при котором достигается эта цена.

$$10x - (0,5x^2 + 2x + 6) \geq 26 \Leftrightarrow x^2 - 16x + 64 \leq 0 \Leftrightarrow (x-8)^2 \leq 0 \Leftrightarrow x = 8.$$

Тем самым, при $p = 10$ (цене 10 тыс. руб) и $x = 8$ (производстве 8 тыс. единиц продукции), завод окупится за три года.

Ответ: $p = 10$

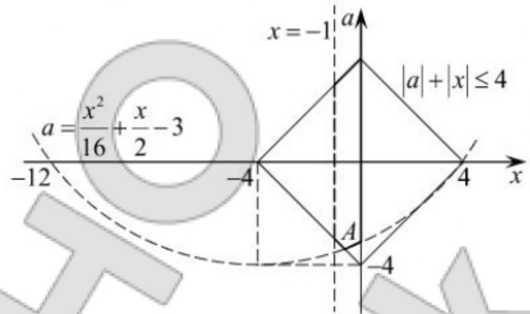
Задание №18 решение и ответ:

Преобразуем систему:

$$\begin{cases}|x|+|a|\le 4,\\ x^2+8x<16a+48\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}|x|+|a|\le 4,\\ a>\dfrac{x^2}{16}+\dfrac{x}{2}-3.\end{cases}$$

Первое неравенство задаёт на плоскости xOa квадрат, ограниченный отрезками прямых $a=x+4$, $a=x-4$, $a=-x-4$ и $a=-x+4$, а неравенство $a>\dfrac{x^2}{16}+\dfrac{x}{2}-3$ задаёт часть плоскости выше параболы с вершиной $(-4;\,-4)$, ветви которой направлены вверх. Найдём координаты точки A пересечения параболы с прямой $a=-x-4$:

$$\frac{x^2}{16}+\frac{x}{2}-3=-x-4\Leftrightarrow\frac{x^2}{16}+\frac{3x}{2}+1=0\Leftrightarrow x^2+24x+16=0\Leftrightarrow x=-12\pm 8\sqrt{2}.$$



Меньший корень $-12-8\sqrt{2}<-4$ соответствует точке пересечения, лежащей во второй четверти. Для большего корня справедливы неравенства:

$$-12+8\sqrt{2}>-1\Leftrightarrow 8\sqrt{2}>11\Leftrightarrow 128>121,$$
$$-12+8\sqrt{2}<0\Leftrightarrow 8\sqrt{2}<12\Leftrightarrow 128<144,$$

поэтому абсцисса точки A лежит на отрезке $[-1;\,0]$, а сама точка лежит внутри вертикальной полосы, ограниченной прямыми $x=-1$ и $x=0$. Тогда искомыми являются значения параметра, большие ординаты точки A, но не большие 4. Имеем: $a=-(-12+8\sqrt{2})-4=8-8\sqrt{2}$.

Итак, система будет иметь решения при $8-8\sqrt{2}<a\le 4$.

Ответ: $8-8\sqrt{2}<a\le 4$.

Задание №19 решение и ответ:

Без ограничения общности можно считать, что числа составляют возрастающую арифметическую прогрессию. Пусть a — первый член этой прогрессии, d её разность. Тогда сумма её членов $S_n=\dfrac{2a+(n-1)d}{2}n$.

а) Да, может. Числа 1, 2, 3, 4 составляют арифметическую прогрессию, и их сумма равна 10.

б) Для суммы членов арифметической прогрессии верно неравенство

$$\frac{2a+(n-1)d}{2}\cdot n\ge\frac{2+(n-1)}{2}\cdot n=\frac{n(n+1)}{2}.$$

Значит, $\dfrac{n(n+1)}{2}<1000$, откуда находим $n\le 44$. Сумма арифметической прогрессии 1, 2, …, 44 равна $990<1000$. Значит, наибольшее значение n равно 44.

в) Для суммы членов арифметической прогрессии имеем:

$$\frac{2a+d(n-1)}{2}\cdot n=129;\ (2a+d(n-1))n=258=2\cdot 3\cdot 43.$$

Таким образом, число n является делителем числа 258. Если $n\ge 43$, то $(2a+d(n-1))n\ge 44\cdot 43>258$, следовательно, $n<43$. Поскольку $n\ge 3$, получаем, что $n=3$ или $n=6$. Прогрессии из 3 и 6 членов с суммой 129 существуют: например, 42, 43, 44 и 19, 20, 21, 22, 23, 24.

Ответ: а) да; б) 44; в) 3, 6.