Ответы для варианта 29382874

Задание №1 решение и ответ:

Сборка шкафа будет стоить $0{,}1 \cdot 3300 = 330$ руб. Цена шкафа вместе со сборкой составит $3300 + 330 = 3630$ руб.
Ответ: 3630.

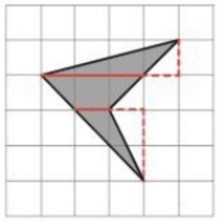
Задание №2 решение и ответ:

Ответ: 19.

Задание №3 решение и ответ:

Площадь четырёхугольника состоит из площадей двух треугольников и площади трапеции. Поэтому

$$S = \frac{1}{2} \cdot 3 \cdot 1 + \frac{1}{2} \cdot (3+1) \cdot 1 + \frac{1}{2} \cdot 1 \cdot 2 = 4{,}5 \text{ см}^2.$$



Задание №4 решение и ответ:

В соревновании принимает участие 6 спортсменов из России, всего 60 участников. Тогда вероятность того, что спортсмен, выступающий десятым, окажется из России, равна

$$\frac{6}{60} = \frac{1}{10} = 0{,}1.$$

Ответ: 0,1.

Задание №5 решение и ответ:

Если две дроби с равными числителями равны, то равны их знаменатели. Имеем:

$$\frac{1}{3x-4} = \frac{1}{4x-11} \Leftrightarrow \begin{cases} 3x-4 = 4x-11, \\ 4x-11 \neq 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = 7, \\ x \neq \dfrac{11}{4} \end{cases} \Leftrightarrow x = 7.$$

Ответ: 7.

Задание №6 решение и ответ:

Треугольник ABC правильный, значит, все его углы равны 60°. Тогда

$$R = \frac{AC}{2\sin B} = \frac{\sqrt{3}}{2\sin 60^\circ} = \frac{\sqrt{3}}{2} \cdot \frac{2}{\sqrt{3}} = 1.$$

Ответ: 1.

Задание №7 решение и ответ:

Найдём производную функции $g(x)$:

$$g'(x) = 12 \cdot f'(x).$$

Найдём значение $f'(x_0)$. Значение производной в точке касания равно угловому коэффициенту касательной.

$$f'(x_0) = k = -\frac{2}{3}.$$

Тогда искомое значение

$$g'(x_0) = 12 \cdot f'(x_0) = 12 \cdot \left(-\frac{2}{3}\right) = -8.$$

Ответ: −8.

Задание №8 решение и ответ:

Искомая поверхность состоит из четырёх пар равных треугольников, каждый из которых имеет площадь равную с четверти площади грани исходного тетраэдра. Поэтому искомая площадь равна половине площади поверхности тетраэдра и равна 6. Ответ: 6.

Задание №9 решение и ответ:

Заметим, что $\operatorname{tg} 81^\circ = \operatorname{ctg} 9^\circ$, тогда имеем:

$$-50\operatorname{tg} 9^\circ \operatorname{tg} 81^\circ + 31 = -50\operatorname{tg} 9^\circ \operatorname{ctg} 9^\circ + 31 = -50 + 31 = -19.$$

Ответ: −19.

Задание №10 решение и ответ:

Подставим значения в формулы: $m = \dfrac{0,02 \cdot 24}{0,86 + 0,1} = 0,5,$

$$R = r_{\text{пок}} - \frac{r_{\text{пок}} - r_{\text{экс}}}{(K+1)^m} = 0,86 - \frac{0,86 - 0,11}{(24+1)^{0,5}} = 0,86 - \frac{0,75}{25^{0,5}} = 0,86 - 0,15 = 0,71.$$

Ответ: 0,71.

Задание №11 решение и ответ:

Пусть t ч – время движения автомобилей до встречи. Первый автомобиль пройдет расстояние $65t$ км, а второй – $75t$ км. Тогда имеем:

$$65t + 75t = 560 \Leftrightarrow 140t = 560 \Leftrightarrow t = 4.$$

Таким образом, автомобили встретятся через 4 часа.

Ответ: 4.

Задание №12 решение и ответ:

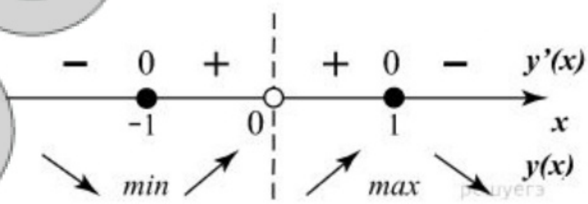
Найдем производную заданной функции:

$$y' = -\left(\frac{x^2+1}{x}\right)' = -\left(x + \frac{1}{x}\right)' = -\left(1 - \frac{1}{x^2}\right) = -1 + \frac{1}{x^2} = \frac{1-x^2}{x^2}.$$

Найдем нули производной:

$$1 - x^2 = 0 \Leftrightarrow x^2 = 1 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x = 1, \\ x = -1. \end{array}\right.$$

Определим знаки производной функции и изобразим на рисунке поведение функции:



Искомая точка минимума $x = -1.$

Ответ: −1.

Задание №13 решение и ответ:

Дважды возводим в квадрат:

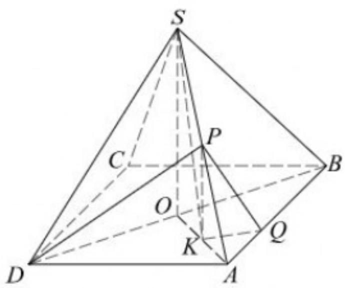
$$\sqrt{2-x}+\sqrt{-x-1}=\sqrt{-5x-7}\Leftrightarrow\begin{cases}2-x\geq 0,\\ -1-x\geq 0,\\ -5x-7\geq 0,\\ (\sqrt{2-x}+\sqrt{-x-1})^2=-5x-7\end{cases}\Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow\begin{cases}x\leq-\dfrac{7}{5},\\ 2\sqrt{x^2-x-2}=-3x-8\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}x\leq-\dfrac{7}{5},\\ -3x-8\geq 0,\\ 4(x^2-x-2)=(-3x-8)^2\end{cases}\Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow\begin{cases}x\leq-\dfrac{8}{3},\\ 5x^2+52x+72=0\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}x\leq-\dfrac{8}{3},\\ \left[\begin{array}{l}x=\dfrac{-26-\sqrt{316}}{5},\\ x=\dfrac{-26+\sqrt{316}}{5}\end{array}\right.\end{cases}\Leftrightarrow x=\dfrac{-26-2\sqrt{79}}{5}.$$

Ответ: $\left\{\dfrac{-26-2\sqrt{79}}{5}\right\}$.

Задание №14 решение и ответ:

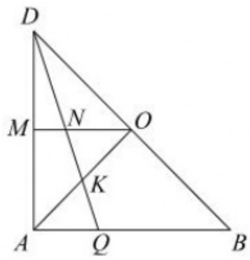


а) Пусть O — центр основания пирамиды, точка M — середина ребра AD, отрезки AO и DQ пересекаются в точке K, а отрезки MO и DQ пересекаются в точке N. Тогда MO — средняя линия в треугольнике ADB, а NO — средняя линия в треугольнике QDB. Значит,

$$NO=\frac{QB}{2}=AQ.$$

Таким образом, треугольники AKQ и OKN равны. Следовательно, точка K — середина отрезка AO. Значит, прямая PK содержит среднюю линию треугольника ASO, поэтому она перпендикулярна плоскости основания пирамиды $SABCD$. Плоскость DPQ содержит прямую PK, поэтому она тоже перпендикулярна плоскости основания.

б) Пусть сторона основания пирамиды равна $3a$, а высота пирамиды равна h. Тогда площадь сечения DSB равна



$$\frac{BD\cdot SO}{2}=\frac{3\sqrt{2}ah}{2}=6,$$

откуда $ah=2\sqrt{2}$.Площадь сечения DPQ равна

$$\frac{DQ\cdot PK}{2}=\frac{\sqrt{DA^2+AQ^2}\cdot SO}{4}=\frac{\sqrt{10}ah}{4}=\sqrt{5}.$$

Ответ: б) $\sqrt{5}$

Задание №15 решение и ответ:

Пусть $y=\log_2 x$, получаем:

$$\frac{\log_2 x-5}{1-2\log_2 x}\geq 2\log_2 x\Leftrightarrow \frac{y-5}{1-2y}\geq 2y\Leftrightarrow \frac{4y^2-y-5}{2y-1}\leq 0\Leftrightarrow \frac{(y+1)(4y-5)}{2y-1}\leq 0\Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} y\leq -1, \\ \frac{1}{2}<y\leq \frac{5}{4}. \end{array}\right.$$

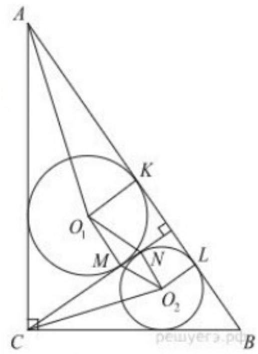
Вернёмся к исходной переменной:

$$\left[\begin{array}{l} \log_2 x\leq -1, \\ 0,5<\log_2 x\leq 1,25 \end{array}\right.\Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} 0<x\leq \frac{1}{2}, \\ \sqrt{2}<x\leq \sqrt[4]{32}. \end{array}\right.$$

Таким образом, решение исходного неравенства $(0;\ 0,5]\cup(\sqrt{2};\ \sqrt[4]{32}]$.

Ответ: $(0;\ 0,5]\cup(\sqrt{2};\ \sqrt[4]{32}]$.

Задание №16 решение и ответ:



а) Лучи AO_1 и CO_2 являются биссектрисами равных углов HAC и HCB соответственно. Значит, $\angle O_1AC=\angle O_2CB$; $\angle O_1AC=90^\circ-\angle O_2CA$, то есть прямые AO_1 и CO_2 перпендикулярны.

б) Пусть прямая AB касается окружностей, вписанных в треугольники ACH и BCH, в точках K и L соответственно. Получаем:

$$AB=\sqrt{AC^2+BC^2}=25;\ CH=\frac{AC\cdot BC}{AB}=12;$$

$$AH=\sqrt{AC^2-CH^2}=16;$$

$$BH=AB-AH=9;\ MH=\frac{AH+CH-AC}{2}=4;$$

$$NH=\frac{BH+CH-BC}{2}=3;\ MN=MH-NH=1.$$

Поскольку O_1KHM и O_2LHM — квадраты, получаем: $O_1M=MH=4,\ O_2N=NH=3.$ Значит, площадь четырёхугольника MO_1NO_2 равна

$$S_{MO_1NO_2}=S_{MO_1N}+S_{MO_2N}=\frac{MO_1\cdot MN}{2}+\frac{NO_2\cdot MN}{2}=\frac{7}{2}.$$

Ответ: б) $\frac{7}{2}$.

Задание №17 решение и ответ:

Прибыль (в млн рублей) за один год выражается величиной

$$px-(0,5x^2+x+7)=-0,5x^2+(p-1)x-7.$$

Это выражение является квадратным трёхчленом и достигает своего наибольшего значения $\frac{(p-1)^2}{2}-7$ при $x=p-1$. Прибыль составит не менее 75 млн рублей, если

$$\frac{(p-1)^2}{2}-7\geq\frac{75}{3}\Leftrightarrow(p-1)^2\geq 64\Leftrightarrow(p-9)(p+7)\geq 0,$$

то есть при $p\geq 9$, поскольку цена продукции не может быть отрицательной. Таким образом, наименьшее значение $p=9$, искомая наименьшая цена 9 тыс. руб.

Ответ: $p=9$.

Задание №18 решение и ответ:

Первое уравнение системы равносильно уравнению $(x-2(a+1))^2+(y-a)^2=1$. Это уравнение задает окружность ω радиусом 1 с центром в точке $(2a+2;a)$. Второе уравнение системы задает пару прямых $y=x$ и $y=-x$, пересекающихся в точке $(0;0)$.

Прямая и окружность имеют не более двух общих точек. Значит, исходная система уравнений имеет ровно четыре различных решения тогда и только тогда, когда окружность ω пересекается с каждой из прямых $y=x$ и $y=-x$, в двух точках и не проходит через точку их пересечения $(0;0)$.

Число точек пересечения окружности с прямой $y=x$ равно числу корней квадратного уравнения

$$2x^2-2(3a+2)x+5a^2+8a+3=0.$$

Это уравнение имеет ровно два корня при положительном дискриминанте:

$$4(3a+2)^2-8(5a^2+8a+3)>0\Leftrightarrow a^2+4a+2<0\Leftrightarrow -2-\sqrt{2}<a<-2+\sqrt{2}.$$

Число точек пересечения окружности с прямой $y=-x$ равно числу корней квадратного уравнения

$$2x^2-2(a+2)x+5a^2+8a+3=0.$$

Это уравнение имеет ровно два корня при положительном дискриминанте:

$$4(a+2)^2-8(5a^2+8a+3)>0\Leftrightarrow 9a^2+12a+2<0\Leftrightarrow\frac{-2-\sqrt{2}}{3}<a<\frac{-2+\sqrt{2}}{3}.$$

Окружность проходит через точку $(0;0)$ при $5a^2+8a+3=0$, то есть при $a=-1$ и $a=-0,6$.

Таким образом, исходная система уравнений имеет ровно 4 решения при:

$$\frac{-2-\sqrt{2}}{3}<a<-1,\quad -1<a<-0,6,\quad -0,6<a<-2+\sqrt{2}.$$

Ответы: $\frac{-2-\sqrt{2}}{3}<a<-1,\quad -1<a<-0,6,\quad -0,6<a<-2+\sqrt{2}.$

Задание №19 решение и ответ:

а) Разобьём множество {100, 101, 102, ..., 199} на два множества пятидесятиэлементных множества следующим образом:

$$\{100, 199, 102, 197, 104, 195, ..., 148, 151\},$$

$$\{101; 198; 103; 196; 105, 194, ..., 149, 150\}.$$

Сумма чисел в этих двух подмножествах одинакова, поэтому исходное множество является хорошим. (Возможны и другие примеры.)

б) Заметим, сумма чисел в подмножестве, которое будет содержать число 2^{200}, будет больше суммы чисел в другом подмножестве, поскольку 2^{200} больше суммы всех остальных чисел:

$$2+4+...+2^{198}+2^{199}<1+2+4+...+2^{198}+2^{199}=2^{200}-1<2^{200}.$$

Следовательно, множество $\{2; 4; 8; ...; 2^{200}\}$ не является хорошим.