Ответы для варианта 29382873

Задание №1 решение и ответ:

После снижения цены на $0{,}2 \cdot 85 = 17$ руб., цена ананаса составит 68 руб. Поэтому на 500 руб. можно будет купить

$$\frac{500}{68} = 7\frac{24}{68} = 7\frac{6}{17}$$

ананаса т. е. 7 целых ананасов.

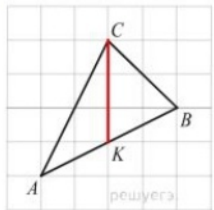
Ответ: 7.

Задание №2 решение и ответ:

Ответ: 7

Задание №3 решение и ответ:

Медиана проведенная из вершины C, будет делить основание AB пополам. Построим отрезок CK. Видно, что он равен 3.



Ответ: 3.

Задание №4 решение и ответ:

Из 5000 тысяч новорожденных $5000 - 2512 = 2488$ девочек. Поэтому частота рождения девочек равна

$$\frac{2488}{5000} = 0{,}4976 \approx 0{,}498.$$

Ответ: 0,498.

Задание №5 решение и ответ:

Последовательно получаем:

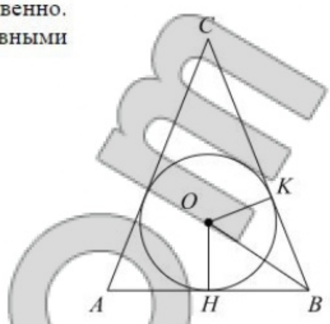
$$\log_2(15 + x) = \log_2 3 \Leftrightarrow 15 + x = 3 \Leftrightarrow x = -12.$$

Ответ: −12.

Задание №6 решение и ответ:

Пусть точки H и K являются точками касания окружности и сторон AB и CB соответственно. Треугольники HOB и KOB равны, т. к. являются прямоугольными с общей гипотенузой и равными катетами, значит, $HB = KB = 3$.

$$P_{ABC} = AC + CB + AH + HB = 2CB + 2HB = 16 + 6 = 22.$$



Ответ: 22.

Задание №7 решение и ответ:

Если функция непрерывна на отрезке $[a; b]$, а её производная положительна (отрицательна) на интервале $(a; b)$, то функция возрастает (убывает) на отрезке $[a; b]$.

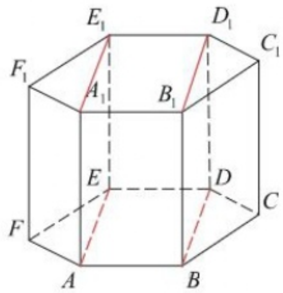
Производная функции отрицательна, на интервалах $(-1; 5)$ и $(7; 11)$. Значит, функция убывает на отрезках $[-1; 5]$ длиной 6 и $[7; 11]$ длиной 4. Длина наибольшего из них 6.

Ответ: 6.

Задание №8 решение и ответ:

Площадь основания четырехугольной призмы равна двум третьим площади основания правильной шестиугольной призмы, а высота у них общая. Поэтому

$$V_{\text{чет}} = \frac{2}{3}V_{\text{шест}} = \frac{2}{3}\cdot 6\cdot 2 = 8.$$



Ответ: 8.

Задание №9 решение и ответ:

Выполним преобразования:

$$\frac{5\sqrt{x}+2}{\sqrt{x}} - \frac{2\sqrt{x}}{x} = \frac{5x+2\sqrt{x}-2\sqrt{x}}{x} = 5.$$

Ответ: 5.

Задание №10 решение и ответ:

Задача сводится к решению уравнения $t(\alpha)=3$ на интервале $(0^\circ;\ 90^\circ)$ при заданных значениях начальной скорости и ускорения свободного падения:

$$\frac{2\cdot 30\cdot \sin\alpha}{10}=3\Leftrightarrow \sin\alpha=\frac{1}{2}\underset{0^\circ<\alpha<90^\circ}{\Leftrightarrow}\alpha=30^\circ.$$

Ответ: 30.

Задание №11 решение и ответ:

Пусть u км/ч — собственная скорость теплохода, тогда скорость теплохода по течению равна $u+1$ км/ч, а скорость теплохода против течения равна $u-1$ км/ч. На весь путь теплоход затратил $34-2=32$ часов, отсюда имеем:

$$\frac{255}{u+1}+\frac{255}{u-1}=32\Leftrightarrow\frac{255\cdot 2u}{u^2-1}=32\Leftrightarrow 255u=16u^2-16\Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow 16u^2-255u-16=0\Leftrightarrow\left[\begin{array}{l} u=\dfrac{255+\sqrt{255^2+4\cdot 16^2}}{32}; \\ u=\dfrac{255-\sqrt{255^2+4\cdot 16^2}}{32} \end{array}\right.\Leftrightarrow\left[\begin{array}{l} u=16; \\ u=-\dfrac{1}{16} \end{array}\right.\underset{u>0}{\Leftrightarrow}u=16.$$

Ответ: 16.

Задание №12 решение и ответ:

Найдем производную заданной функции: $y'=-2\sin x-\dfrac{18}{\pi}$. Уравнение $y'=0$ не имеет решений, производная отрицательна при всех значениях переменной, поэтому заданная функция является убывающей.

Следовательно, наибольшим значением функции на заданном отрезке является

$$y\left(-\frac{2\pi}{3}\right)=2\cos\left(-\frac{2\pi}{3}\right)+\frac{18}{\pi}\frac{2\pi}{3}+4=15.$$

Ответ: 15.

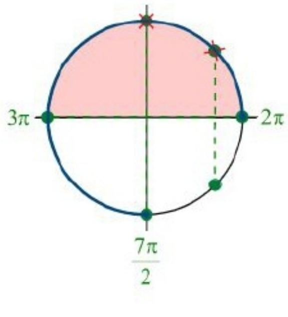
Задание №13 решение и ответ:

а) Получаем:

$$\left(\sqrt{2}\sin^2x+\cos x-\sqrt{2}\right)\sqrt{-6\sin x}=0\Leftrightarrow\left[\begin{array}{l}\sin x=0, \\ \begin{cases}\sqrt{2}\sin^2x+\cos x-\sqrt{2}=0, \\ -\sin x\ge 0\end{cases}\end{array}\right.\Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow\left[\begin{array}{l}\sin x=0, \\ \begin{cases}\cos x-\sqrt{2}\cos^2x=0, \\ \sin x\le 0\end{cases}\end{array}\right.\Leftrightarrow\left[\begin{array}{l}\sin x=0, \\ \begin{cases}\cos x(1-\sqrt{2}\cos x)=0, \\ \sin x\le 0\end{cases}\end{array}\right.\Leftrightarrow$$

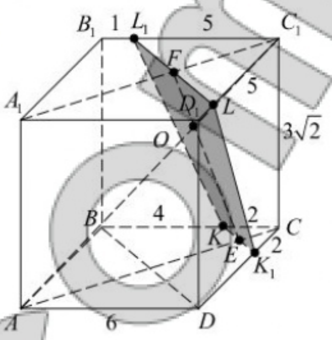
$$\Leftrightarrow\begin{cases}\sin x\le 0, \\ \left[\begin{array}{l}\cos x=\dfrac{\sqrt{2}}{2}, \\ \cos x=0, \\ \sin x=0,\end{array}\right.\end{cases}\Leftrightarrow\left[\begin{array}{l}x=\pi k, \\ x=-\dfrac{\pi}{4}+2\pi k, \\ x=-\dfrac{\pi}{2}+2\pi k.\ k\in\mathbb{Z}\end{array}\right.$$



б) Корни, принадлежащие отрезку $\left[2\pi;\dfrac{7\pi}{2}\right]$, отберём с помощью единичной окружности. Получаем числа: $2\pi, 3\pi$ и $\dfrac{7\pi}{2}$.

Ответ: а) $\left\{\pi k, -\dfrac{\pi}{4}+2\pi k, -\dfrac{\pi}{2}+2\pi k : k\in\mathbb{Z}\right\}$; б) $2\pi,\ 3\pi,\ \dfrac{7\pi}{2}$.

Задание №14 решение и ответ:



а) Так как плоскость γ параллельна диагонали основания BD, то пересекает основание $ABCD$ по прямой KK_1 параллельной BD, K_1 лежит на CD. Так как, $ABCD || A_1B_1C_1D_1$, прямая сечения LL_1 параллельна BD, где L_1 лежит на B_1C_1. Сечением призмы будет трапеция KK_1LL_1.

Для того, чтобы прямая была перпендикулярна плоскости, необходимо, чтобы она была перпендикулярна двум пересекающимся прямым, лежащим в этой плоскости.

Заметим, что проекцией прямой AC_1 на плоскость $ABCD$ является прямая AC. Кроме того, $AC \perp BD$, как диагонали квадрата таким образом по теореме о трех перпендикулярах $AC_1 \perp BD$, следовательно, $AC_1 \perp KK_1$.

Рассмотрим плоскость AA_1C_1C. Пусть эта плоскость пересекает прямые KK_1 и LL_1 в точках E и F соответственно. O — точка пересечения EF и AC_1. Четырёхугольник AA_1C_1C — прямоугольник, причём

$$AA_1 = 3\sqrt{2}, AC = 6\sqrt{2}, EC = \sqrt{2}, AE = 5\sqrt{2}, FC_1 = \frac{5\sqrt{2}}{2}.$$

Так как AA_1C_1 прямоугольник, $\Delta AEO \sim \Delta C_1FO$, $k = \dfrac{AE}{C_1F} = 2$. Значит, $C_1O = \dfrac{AC_1}{3}$, $FO = \dfrac{FE}{3}$. Таким образом,

$$C_1O = \frac{1}{3}\sqrt{AC^2 + CC_1^2} = \sqrt{10}, FO = \frac{1}{3}\sqrt{(FC_1 - CE)^2 + CC_1^2} = \frac{\sqrt{10}}{2}.$$

Тогда по обратной теореме Пифагора $C_1O^2 + FO^2 = 10 + \dfrac{5}{2} = \dfrac{25}{2} = \left(\dfrac{5\sqrt{2}}{2}\right)^2 = C_1F^2$, следовательно, треугольник C_1FO прямоугольный, $AC_1 \perp EF$. Таким образом, $AC_1 \perp KK_1LL_1$.

б) Расстояние от точки B_1 до плоскости γ равно расстоянию до нее от любой точки параллельной ей прямой B_1D_1. Из точки M — пересечения диагоналей грани $A_1B_1C_1D_1$ в плоскости AA_1C_1C опустим перпендикуляр MH на прямую EF. Так как, по доказанному в п. а) $AC_1 \perp KK_1LL_1$, плоскость $AA_1C_1C \perp KK_1LL_1$, следовательно, указанный перпендикуляр — искомое расстояние. Найдем $MF = \dfrac{A_1C_1}{2} - FC_1 = \dfrac{\sqrt{2}}{2}$. Заметим, $\Delta MFH \sim \Delta C_1FO$, $k = \dfrac{MF}{FC_1} = \dfrac{1}{5}$. Таким образом, $MH = \dfrac{C_1O}{5} = \dfrac{\sqrt{10}}{5}$.

Ответ: б) $\dfrac{\sqrt{10}}{5}$.

Задание №15 решение и ответ:

Пусть $t = \lg x$, тогда неравенство примет вид:

$$t^4 - 4t^3 + 5t^2 - 2t \geq 0 \Leftrightarrow t^4 - 4t^3 + 4t^2 + t^2 - 2t \geq 0 \Leftrightarrow (t^2 - 2t)^2 + t^2 - 2t \geq 0 \Leftrightarrow (t^2 - 2t)(t^2 - 2t + 1) \geq 0 \Leftrightarrow t(t-1)^2(t-2) \geq 0,$$

откуда $t \leq 0$, $t = 1$, $t \geq 2$.

При $t \leq 0$ получим: $\lg x \leq 0$, откуда $0 < x \leq 1$.

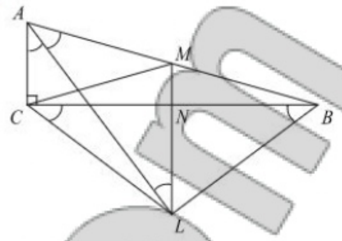
При $t = 1$ получим: $\lg x = 1$, откуда $x = 10$.

При $t \geq 2$ получим: $\lg x \geq 2$, откуда $x \geq 100$.

Решение исходного неравенства: $0 < x \leq 1$, $x = 10$, $x \geq 100$.

Ответ: $(0;\ 1] \cup \{10\} \cup [100;\ +\infty)$.

Задание №16 решение и ответ:



а) Прямая ML параллельна прямой AC, так как содержит среднюю линию треугольника ABC (см. рисунок). Следовательно,

$$\angle ALM = \angle LAC = \angle LAM.$$

Таким образом,

$$LM = AM = BM = CM,$$

то есть точки A, B, C и L лежат на окружности с центром в точке M. Получаем:

$$\angle LBC = \angle LAC = \angle LAB = \angle LCB,$$

а значит, треугольники AML и BLC подобны по двум углам.

б) Углы ALB и ACB опираются на одну дугу, значит, $\angle ALB = 90^\circ$. Коэффициент подобия треугольников BLC и AML равен

$$\frac{LB}{AM} = \frac{2LB}{AB} = 2\sin\angle LAB.$$

По условию

$$\cos\angle BAC = \frac{7}{25},$$

откуда

$$1 - 2\sin^2\angle BAL = \frac{7}{25} \Leftrightarrow \sin^2\angle BAL = \frac{9}{25} \Leftrightarrow \sin\angle BAL = \frac{3}{5}.$$

Значит, $\frac{AM}{LB} = \frac{5}{6}$ и площади треугольников AML и BLC относятся как $\frac{25}{36}$.

Ответ: б) 25 : 36.

Задание №17 решение и ответ:

Прибыль фирмы выражается как $f(P) = PQ - (3000Q + 5\,000\,000) = -P^2 + 18\,000P - 50\,000\,000$, то есть квадратично зависит от цены P. Пусть первоначальная цена равнялась P_0. После снижения цена стала равняться $0{,}8P_0$. Наибольшая прибыль достигается при значении P, для которого $f(P)$ достигает максимума. График функции $y = f(P)$ — парабола с ветвями, направленными вниз, поэтому максимум $f(P)$ достигается в вершине параболы. Поскольку $f(P_0) = f(0,8P_0)$, вершина параболы находится в точке $\frac{P_0 + 0,8P_0}{2} = 0,9P_0$. Значит, нужно увеличить цену с $0{,}8P_0$ до $0{,}9P_0$, то есть на 12,5%.

Ответ: 12,5.

Задание №18 решение и ответ:

Заметим, что

$$\sqrt{a\sin x+\cos x}=\sqrt{a\cos x+\sin x}\ \Leftrightarrow\ \begin{cases} a\sin x+\cos x=a\cos x+\sin x,\\ a\sin x+\cos x\geq 0.\end{cases}$$

Преобразуем уравнение:

$$a\sin x+\cos x=a\cos x+\sin x\Leftrightarrow (a-1)\sin x-(a-1)\cos x=0\ \Leftrightarrow\ (a-1)(\sin x-\cos x)=0.$$

Рассмотрим два случая.
Пусть $a=1$, тогда из неравенства:

$$\sin x+\cos x\geq 0\ \Leftrightarrow\ \sin\left(x+\frac{\pi}{4}\right)\geq 0\ \Leftrightarrow\ -\frac{\pi}{4}+2\pi k\leq x\leq\frac{3\pi}{4}+2\pi k$$

Отрезку $\left[\frac{3\pi}{4};\ \frac{7\pi}{4}\right]$ принадлежат два числа $\frac{3\pi}{4}$ и $\frac{7\pi}{4}$.
Пусть $a\neq 1$, тогда имеем:

$$\sin x-\cos x=0\ \Leftrightarrow\ \operatorname{tg}x=1\ \Leftrightarrow\ \left[\begin{array}{l} x=\frac{\pi}{4}+2\pi n,\\ x=\frac{5\pi}{4}+2\pi n,\end{array}\right.\ n\in\mathbb{Z}.$$

В первой серии не содержится корней, лежащих на отрезке $\left[\frac{3\pi}{4};\ \frac{7\pi}{4}\right]$. Среди корней, содержащихся во второй серии, отрезку $\left[\frac{3\pi}{4};\ \frac{7\pi}{4}\right]$ принадлежит одно число $\frac{5\pi}{4}$. Подставляя его в неравенство, получаем: $-a\frac{\sqrt{2}}{2}-\frac{\sqrt{2}}{2}\geq 0$, откуда $a\leq -1$.

Ответ: $a\leq -1$, $a=1$.

Задание №19 решение и ответ:

а) Очевидно, что начиная со второй строчки, все числа в таблице не больше 1000. Кроме того, каждое число не больше написанного под ним. Поэтому сумма чисел в третьей строчке не меньше, чем во второй и т.д., и каждая из этих сумм не больше миллиона. Следовательно, поскольку все время суммы возрастать не могут, в каких-то соседних строчках суммы совпадут, а тогда совпадут и сами строчки.

б) Докажем, что если в m-ой строчке при $m\geq 2$, число отлично от написанного над ним, то оно не меньше, чем 2^{m-2}. Действительно, для $m=2$ это очевидно, так как все числа второй строки натуральные. Пусть это уже проверено для всех строк с номерами, меньшими m. Пусть в $m-1$-ой строчке написано число а, а под ним написано число b, большее а. Тогда в $m-2$-ой строчке написано b чисел, равных а. Ясно, что в $m-2$-ой строчке будет написано несколько групп одинаковых чисел, по а в каждой группе, причем числа из разных групп различны. Отсюда вытекает, что b делится на а, то есть $b\geq 2a$. Кроме того, по крайней мере одно из чисел в этих группах отличается от а, а значит, по предположению индукции $a\geq 2^{(m-1)-2}$. Итак, $b\geq 2a\geq 2^{m-2}$. Наше утверждение доказано по индукции для всех $m\geq 2$. Если предположить, что 11-я строчка отлична от 12-й, то какое-то число в 12-й строчке будет больше, чем $2^{12-2}=1024>1000$, что невозможно.

в) Приведем такой пример:
0, 1, 2, 2, 4, 4, 4, 4, …, 256, …, 256, 488, …, 488
1, 1, 2, 2, 4, 4, 4, 4, …, 256, …, 256, 488, …, 488
2, 2, 2, 2, 4, 4, 4, 4, …, 256, …, 256, 488, …, 1488
4, 4, 4, 4, 4, 4, 4, 4, …, 256, …, 256, 488, …, 488
…………………………………………………………
256, ……………………………, 256, 488, …, 488
1 512, ……………………………, 512, 488, …, 488
В первой строчке 0 и 1 встречаются по одному разу, 2 — два раза, 4 — четыре раза, 8 — восемь раз, …., 256 — 256 раз, 488 — встречается 488 раз, в 11 строчке встречается 512 раз число 512 и 488 раз число 488.