Ответы для варианта 29527689

Задание №1 решение и ответ:

Чтобы сварить 27 кг вишни, нужно купить $27 \cdot 1{,}5 = 40{,}5$ кг сахара. Значит, нужно купить 41 упаковку сахара. Ответ: 41.

Задание №2 решение и ответ:

Ответ: 4 место

Задание №3 решение и ответ:

Решение.

Площадь прямоугольного треугольника равна половине произведения его катетов. Поэтому

$$S = \frac{1}{2} \cdot 2 \cdot 6 = 6 \text{ см}^2.$$

Ответ: 6.

Задание №4 решение и ответ:

В чемпионате принимает участие $20 - (8 + 7) = 5$ спортсменок из Китая. Тогда вероятность того, что спортсменка, выступающая первой, окажется из Китая, равна

$$\frac{5}{20} = \frac{1}{4} = 0{,}25.$$

Ответ: 0,25.

Задание №5 решение и ответ:

Последовательно получаем:

$$\frac{1}{10x+6} = 1 \Leftrightarrow 10x + 6 = 1 \Leftrightarrow 10x = -5 \Leftrightarrow x = -\frac{5}{10}.$$

Ответ: −0,5.

Задание №6 решение и ответ:

Больший отрезок средней линии трапеции является средней линией треугольника ADB, а значит, равен половине его основания.

$$EO = \frac{1}{2}AB = \frac{1}{2} \cdot 10 = 5.$$

Ответ: 5.

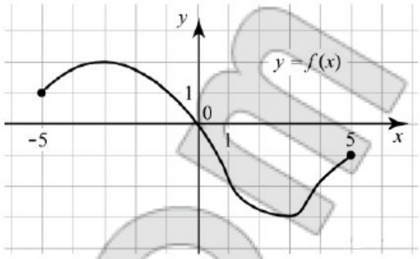
Задание №7 решение и ответ:

Напомним, что если функция непрерывна на отрезке $[a; b]$, а её производная положительна (отрицательна) на интервале $(a; b)$, то функция возрастает (убывает) на отрезке $[a; b]$.

Тем самым, функция f, график производной которой дан в условии, возрастает на отрезках $[-5; -3]$ и $[3; 5]$ и убывает на отрезке $[-3; 3]$.

Из этого следует, что f принимает наименьшее значение на левой границе отрезка, в точке -5, или в точке минимума $x_{\min} = 3$. В силу возрастания f на отрезке $[3; 5]$ справедливо неравенство $f(5) > f(3)$. Поскольку по условию $f(-5)$ не меньше, чем $f(5)$, справедлива оценка $f(-5) > f(3)$.

Тем самым, наименьшего значения функция f достигает в точке 3. График одной из функций, удовлетворяющих условию, приведён на рисунке.



Ответ: 3.

Задание №8 решение и ответ:

Площадь основания конуса равна $S_{\text{осн}} = \pi r^2$, а площадь боковой поверхности $S_{\text{бок}} = \pi rl$. Из условия имеем:

$$S_{\text{бок}} = 2S_{\text{осн}} \Leftrightarrow \pi rl = 2\pi r^2 \Leftrightarrow l = 2r.$$

Значит, в прямоугольном треугольнике, образованном высотой, образующей и радиусом основания конуса, катет, равный радиусу, вдвое меньше гипотенузы. Тогда он лежит напротив угла 30°. Следовательно, угол между образующей конуса и плоскостью основания равен 60°.

Ответ: 60.

Задание №9 решение и ответ:

Используя свойства логарифмов, получаем:

$$\frac{\log_2 12,8 - \log_2 0,8}{5^{\log_{25} 16}} = \frac{\log_2 \frac{12,8}{0,8}}{16^{\log_{25} 5}} = \frac{\log_2 \frac{128}{8}}{16^{0,5}} = \frac{\log_2 2^4}{4} = \frac{4}{4} = 1.$$

Ответ: 1.

Задание №10 решение и ответ:

Задача сводится к решению неравенства $p \leq 140$ кПа при известных значениях длины балок $l = 18$ м, массы экскаватора $m = 1260$ т:

$$p \leq 140 \Leftrightarrow \frac{1260 \cdot 10}{2 \cdot 18s} \leq 140 \Leftrightarrow s \geq 2,5 \text{ м}.$$

Ответ: 2,5.

Задание №11 решение и ответ:

В 2009 году число жителей стало $40\,000 + 0,08 \cdot 40\,000 = 43\,200$ человек, а в 2010 году число жителей стало $43\,200 + 0,09 \cdot 43\,200 = 47\,088$ человек.

Ответ: 47 088.

Задание №12 решение и ответ:

Найдем производную заданной функции:

$$y' = 5x^4 - 15x^2 - 20.$$

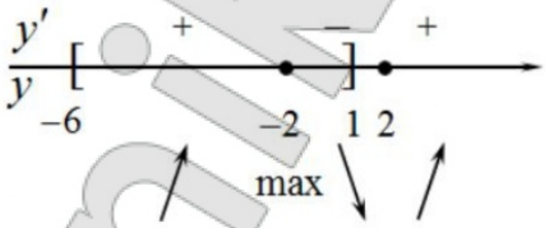
Сделаем замену $x^2 = t$ и решим полученное уравнение:

$$5t^2 - 15t - 20 = 0 \Leftrightarrow t^2 - 3t - 4 = 0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} t = -1, \\ t = 4. \end{array}\right.$$

Вернемся к исходной переменной:

$$\left[\begin{array}{l} x^2 = -1, \\ x^2 = 4 \end{array}\right. \underset{x^2 \geq 0}{\Leftrightarrow} x^2 = 4 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x = 2, \\ x = -2. \end{array}\right.$$

Определим знаки производной функции и изобразим на рисунке поведение функции:



На отрезке $[-6; 1]$ функция достигает наибольшего значения в точке -2. Найдем его:

$$y(-2) = (-2)^5 - 5 \cdot (-2)^3 - 20 \cdot (-2) = -32 + 40 + 40 = 48.$$

Ответ: 48.

Задание №13 решение и ответ:

Если произведение = 0, то один из множителей равен 0.

Но! В нашем случае нужно следить за областью определения. Т.е. чтоб выражение под корнем было ≥ 0.

$9 - x^2 \geq 0$

$x^2 - 9 \leq 0$

$x^2 \leq 9$

$|x| \leq 3$

$x \in [-3; 3]$

Имеем 2 выхода:

1) $\cos x = 0$

$x = \pi/2 + \pi n$, $n \in Z$, где Z - множество целых чисел

Надо выбрать теперь такие x, которые удовлетворяют области определения. Знаем, что $\pi = 3{,}14$, а $\pi/2 = 1{,}57$.

Перебираем решения и получаем, что нам подходят решения при $n = 0$ и $n = -1$. Т.е. $x = \pi/2$ и $x = -\pi/2$

2) $\sqrt{(9 - x^2)} = 0$

Возведем в квадрат и получим:

$9 - x^2 = 0$

$(3 - x)(3 + x) = 0$

Очевидно, что решения $x = 3$ и $x = -3$ удовлетворяют области определения.

Ответ: $x = -3; -\pi/2; \pi/2; 3$

Задание №14 решение и ответ:

а) Поскольку плоскость α параллельна прямой AC, то она пересекает грань $ABCD$ по некоторой прямой FL, параллельной прямой AC. Пусть точка $L \in BC$ и прямая FL пересекает прямую BD в точке K а прямая KE пересекает прямую BB_1 в точке P. Тогда точка пересечения прямых B_1D и KE есть точка пересечения плоскости α с диагональю B_1D (см. рис. 1).

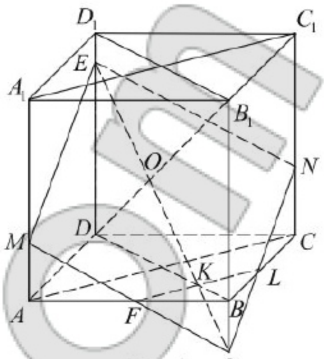


Рис. 1

Прямая FL параллельна AC, значит, точка F середина ребра AB. Тогда, отрезок FL — средняя линия треугольника ABC и, следовательно, $BK = \frac{1}{4}BD$.

Положим $DD_1 = a$, тогда $DE = \frac{6}{7}a$.

Далее имеем (см. рис. 2):

1) Треугольники BKP и DKE — подобны, откуда $\frac{BP}{DE} = \frac{BK}{DK} = \frac{1}{3}$. Таким образом $BP = \frac{1}{3} \cdot \frac{6}{7}a = \frac{2}{7}a$, $PB_1 = \frac{9}{7}a$.

2) Треугольники DOE и B_1OP — подобны, откуда $\frac{DO}{OB_1} = \frac{DE}{PB_1} = \frac{6a \cdot 7}{7 \cdot 9a} = \frac{2}{3}$, что и требовалось доказать.

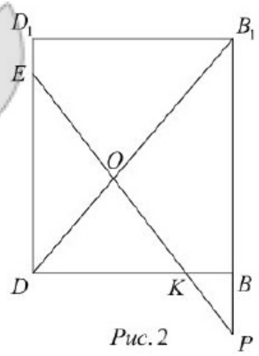


Рис. 2

б) Из того, что $FL \parallel AC$ и $AC \perp BD$, получаем, что $FL \perp BD$. Значит, согласно теореме о трех перпендикулярах, $FL \perp PK$. Таким образом, угол PKB — линейный угол искомого двугранного угла.

Учитывая, что $PB = \frac{2}{7}BB_1 = 2$ и $BK = \frac{1}{4}BD = \sqrt{2}$, из треугольника PBK находим: $\operatorname{tg}\angle PKB = \frac{PB}{BK} = \frac{2}{\sqrt{2}} = \sqrt{2}$, откуда $\angle PKB = \operatorname{arctg}\sqrt{2}$.

Ответ: б) $\operatorname{arctg}\sqrt{2}$.

Задание №15 решение и ответ:

$1+\dfrac{10}{\log_2 x-5}+\dfrac{16}{\log_2^2 x-\log_2(32x^{10})+30}\geq 0,$

при решении учитываем, что функция $y=\log_2 x$ возрастающая,

ОДЗ: $\begin{cases} x>0, \\ \log_2 x-5\neq 0, \\ \log_2^2 x-\log_2(32x^{10})+30\neq 0; \end{cases}$ $\begin{cases} x>0, \\ \log_2 x\neq 5, \\ \log_2^2 x-\log_2 2^5-\log_2 x^{10}+30\neq 0; \end{cases}$

так как $x>0$, то $\log_2 x^{10}=10\log_2|x|=10\log_2 x,$

$\begin{cases} x>0, \\ x\neq 2^5, \\ \log_2^2 x-5-10\log_2 x+30\neq 0; \end{cases}$ $\begin{cases} x>0, \\ x\neq 32, \\ \log_2^2 x-10\log_2 x+25\neq 0 \end{cases}$ $\begin{cases} x>0, \\ x\neq 32, \\ (\log_2 x-5)^2\neq 0; \end{cases}$

$\begin{cases} x>0, \\ x\neq 32, \\ \log_2 x-5\neq 0; \end{cases}$ $\begin{cases} x>0, \\ x\neq 32; \end{cases}$

$1+\dfrac{10}{\log_2 x-5}+\dfrac{16}{(\log_2 x-5)^2}\geq 0,$

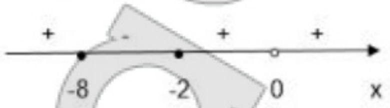
$\dfrac{(\log_2 x-5)^2+10(\log_2 x-5)+16}{(\log_2 x-5)^2}\geq 0,$

пусть $\log_2 x-5=y$, получаем неравенство:

$\dfrac{y^2+10y+16}{y^2}\geq 0,$

$$\left|\begin{array}{l} y^2+10y+16=0, \\ D=100-64=36=6^2, \\ y=\dfrac{-10\pm 6}{2}, \\ y_1=-8, \qquad y_2=-2; \end{array}\right.$$

$\dfrac{(y+8)(y+2)}{y^2}\geq 0,$



$\left[\begin{array}{l} y\leq -8, \\ -2\leq y<0, \\ y>0. \end{array}\right.$

Делаем обратный переход:

$\left[\begin{array}{l} \log_2 x-5\leq -8, \\ -2\leq \log_2 x-5<0, \\ \log_2 x-5>0; \end{array}\right.$ $\left[\begin{array}{l} \log_2 x\leq -3, \\ 3\leq \log_2 x<5, \\ \log_2 x>5; \end{array}\right.$ $\left[\begin{array}{l} x\leq 2^{-3}, \\ 2^3\leq x<2^5, \\ x>2^5; \end{array}\right.$ $\left[\begin{array}{l} x\leq \dfrac{1}{8}, \\ 8\leq x<32, \\ x>32. \end{array}\right.$

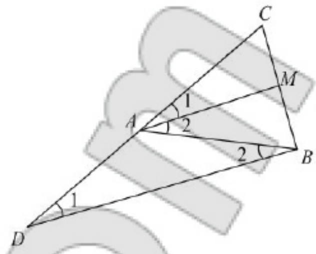
С учетом ОДЗ запишем решение неравенства:

$x\in\left(0;\dfrac{1}{8}\right]\cup[8;32)\cup(32;+\infty).$

Ответ: $\left(0;\dfrac{1}{8}\right]\cup[8;32)\cup(32;+\infty).$

Задание №16 решение и ответ:

а) Имеем:



$$BD \parallel AM \Leftrightarrow \begin{cases} \angle BAM = \angle ABD, \\ \angle MAC = \angle ADB. \end{cases}$$

ΔBAD равнобедренный, следовательно, $\angle ADB = \angle ABD$.
Тогда $\angle BAM = \angle MAC$.

б) $AB^2 + BC^2 = AC^2 \Rightarrow \Delta ABC$ прямоугольный.

AM — биссектриса. Следовательно,

$$\frac{BM}{MC} = \frac{AB}{AC} = \frac{4}{5} \Rightarrow MC = 10;\ S_{AMC} = \frac{AB \cdot MC}{2} = 120.$$

$$\Delta AMC \sim \Delta DBC,\ k = \frac{BC}{MC} = \frac{9}{5},\ S_{\Delta DBC} = \left(\frac{9}{5}\right)^2 S = 388,8 \Rightarrow\ S_{AMBD} = S_{\Delta DBC} - S_{\Delta AMC} = 268,8.$$

Ответ: 268, 8.

Задание №17 решение и ответ:

Пусть сумма кредита составляет S у. е., а процентная ставка по кредиту $x\%$. К концу первого года сумма долга фермера в банк с учетом начисленных процентов составила $(1+0,01x)S$ у. е.

После возвращения банку $\frac{3}{4}$ части от суммы долга долг фермера на следующий год составил $\frac{1}{4}(1+0,01x)S$ у. е.

На эту сумму в следующем году вновь начислены проценты. Сумма долга фермера к концу второго года погашения кредита с учетом процентной ставки составила $\frac{1}{4}(1+0,01x)^2S$ у. е. По условию задачи эта сумма равна $1,21S$ у. е.

Решим уравнение $\frac{1}{4}(1+0,01x)^2S = 1,21S$ на множестве положительных чисел.

$$(1+0,01x)^2 = 4 \cdot 1,21 \Leftrightarrow 1+0,01x = 2 \cdot 1,1 \Leftrightarrow 0,01x = 1,2 \Leftrightarrow x = 120.$$

Ответ: 120 %.

Задание №18 решение и ответ:

Первое уравнение системы раскладывается на множители: $(x-2y)(y-2x) = 0$. Следовательно, уравнение задаёт пару прямых $x = 2y$ и $y = 2x$.

Второе уравнение при каждом $a \neq 0$ — уравнение окружности с центром $(a,\ a)$ и радиусом $a^2\sqrt{5}$.

Если $a = 0$, то система имеет единственное решение и поэтому не удовлетворяет условию задачи.

Пусть $a \neq 0$. Тогда условие задачи выполнено тогда и только тогда, когда окружность касается каждой из прямых. То есть расстояние от центра до каждой из прямых равно радиусу окружности.

Можно воспользоваться геометрическим методом или использовать формулу расстояния от точки до прямой.

$$\frac{|a-2a|}{\sqrt{5}} = \frac{|2a-a|}{\sqrt{5}} = a^2\sqrt{5}.$$

Отсюда $a = \pm\, 0{,}2$.

Ответ: $a = \pm\, 0{,}2$.

Комментарий: на самом деле, конечно, задача сводится к исследований количества решений системы

$$\begin{cases} y = 2x, \\ (x-a)^2 + (y-a)^2 = 5a^4. \end{cases}$$

То есть, уравнения $(x-a)^2 + (2x-a)^2 = 5a^4 \Leftrightarrow 5x^2 - 6ax + 2a^2 - 5a^4 = 0$, которое имеет единственное решение при

$$D = 100a^4 - 4a^2 = 4a^2(25a^2 - 1) = 0 \Leftrightarrow \left[\begin{aligned} &a = 0, \\ &a = \pm 0,2. \end{aligned}\right.$$

При $a = 0$ прямые пересекаются, поэтому исходная система имеет не два, а всего одно решение.

Задание №19 решение и ответ:

а) Например, последовательность $5;\ 0;\ 2;\ 1;\ 1;\ 1$ удовлетворяет условию задачи.

б) Если $M_1 = 1,\ M_3 = 3$, получаем:

$$a_1 + a_2 + a_4 + a_5 + a_6 = 15,$$
$$a_2 + a_3 + a_4 + a_5 + a_6 = 5,$$

откуда $a_1 - a_3 = 10$, что невозможно. Значит, не существует такой последовательности, для которой $M_3 = 3$.

в) Поскольку $M_1 = 1$, получаем:

$$a_2 + a_3 + a_4 + a_5 + a_6 = 5,$$

а так как $a_1 - a_3 \leq 9$, получаем:

$$a_1 + a_2 + a_4 + a_5 + a_6 \leq 14,$$

то есть $M_3 \leq 2,8$.

В последовательности 9; 4; 0; 1; 0; 0 имеем:

$$M_1 = 1,\ M_2 = 2,\ M_3 = 2,8.$$

Ответ: а) например, 5; 0; 2; 1; 1; 1 б) нет; в) 2,8.