Ответы для варианта

Задание №1 решение и ответ:

Если спидометр показывает скорость 65 миль в час, значит, в километрах это будет $65 \cdot 1{,}609 = 104{,}585$ км в час. Ответ: 105

Задание №2 решение и ответ:

Расположим страны в порядке убывания средних баллов:

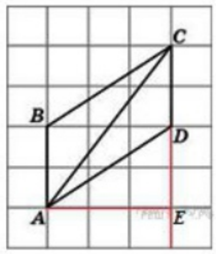
1) Япония
2) Россия
3) Великобритания
4) США
5, 6) Венгрия, Италия
7, 8) Австралия, Швеция
9) Словения
10) Норвегия

Словения находится на девятом месте

Ответ: 9.

Задание №3 решение и ответ:

Продолжим сторону CD на две клетки вниз до точки E (см. рисунок). Треугольник ACE прямоугольный, по теореме Пифагора



$$AC = \sqrt{4^2 + 3^2} = 5.$$

Ответ: 5.

Задание №4 решение и ответ:

Указанные события противоположны, поэтому искомая вероятность равна $1 - 0{,}81 = 0{,}19$.
Ответ: 0,19.

Задание №5 решение и ответ:

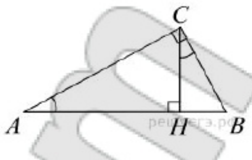
Воспользуемся формулой $(a+b)^2 = a^2 + 2ab + b^2$:

$$x^2 + 9 = (x+9)^2 \Leftrightarrow x^2 + 9 = x^2 + 18x + 81 \Leftrightarrow 18x = -72 \Leftrightarrow x = -4.$$

Ответ: -4.

Задание №6 решение и ответ:

Углы A и HCB равны как углы со взаимно перпендикулярными сторонами. Поэтому из треугольников BHC и BCA имеем:



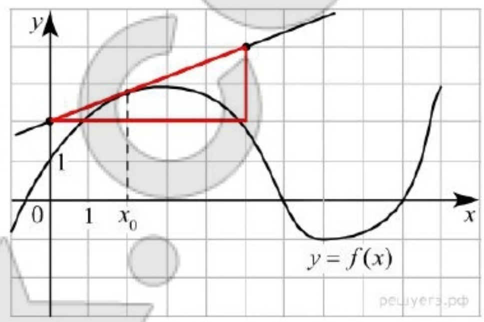
$$BH = CH\,\mathrm{tg}\,\angle HCB = CH\,\mathrm{tg}A = AH\,\mathrm{tg}^2A = 27\cdot\frac{2}{3}\cdot\frac{2}{3} = 12.$$

Ответ: 12.

Задание №7 решение и ответ:

Найдём производную функции $g(x)$:

$$g'(x) = 2x - f'(x).$$



По рисунку найдём значение $f'(x_0)$. Значение производной в точке касания равно угловому коэффициенту касательной, который, в свою очередь, равен тангенсу угла наклона данной касательной к оси абсцисс. Поэтому $f'(x_0) = f'(2) = \frac{2}{5} = 0,4.$

Тогда для искомого значения получаем

$$g'(x_0) = g'(2) = 2\cdot x_0 - f'(x_0) = 2\cdot 2 - f'(2) = 2\cdot 2 - 0,4 = 3,6.$$

Ответ: 3,6.

Задание №8 решение и ответ:

Вершина правильной пирамиды проектируется в центр ее основания. В правильном шестиугольнике со стороной a расстояние от его центра до стороны равно радиусу вписанной окружности, который равен $\frac{\sqrt{3}}{2}a = 2\sqrt{3}$. Так как угол между боковой гранью и основанием равен 45°, высота пирамиды также равна $h = 2\sqrt{3}$. Тогда имеем:

$$V = \frac{1}{3}Sh = \frac{1}{3}\cdot 6\cdot\frac{4^2\sqrt{3}}{4}\cdot 2\sqrt{3} = 48.$$

Ответ: 48.

Задание №9 решение и ответ:

Пользуемся периодичностью тангенса и используем формулу приведения:

$$\mathrm{tg}\left(\alpha + \frac{5\pi}{2}\right) = \mathrm{tg}\left(\alpha + 2\pi + \frac{\pi}{2}\right) = \mathrm{tg}\left(\alpha + \frac{\pi}{2}\right) = -\mathrm{ctg}\,\alpha = -\frac{1}{\mathrm{tg}\,\alpha} = -2,5.$$

Ответ: −2,5.

Задание №10 решение и ответ:

Задача сводится к решению уравнения $v = 2$ м/с при известных значениях $c = 1500$ м/с — скорости звука в воде и $f_0 = 749$ МГц — частоты испускаемых импульсов:

$$v = 2 \Leftrightarrow 1500 \cdot \frac{f - 749}{f + 749} = 2 \Leftrightarrow 750 \cdot \frac{f - 749}{f + 749} = 1 \Leftrightarrow 750f - 750 \cdot 749 = f + 749 \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow 749f = 749 \cdot 751 \Leftrightarrow f = 751 \text{ МГц}.$$

Ответ: 751.

Задание №11 решение и ответ:

Пусть первый принтер расходует пачку бумаги за t минут, тогда второй — за $t + 10$ минут. Принтеры расходуют бумагу со скоростью $\frac{1}{t} + \frac{1}{t+10}$ пачки в минуту, при этом за минуту принтеры расходуют $\frac{1}{12}$ пачки бумаги. Из уравнения $\frac{1}{t} + \frac{1}{t+10} = \frac{1}{12}$ подбором находим $t = 20$. Искомое решение единственно в силу убывания левой части уравнения на луче $(0; +\infty)$. Тем самым, первый принтер израсходует пачку бумаги за 20 минут.

Ответ: 20.

Задание №12 решение и ответ:

Квадратный трехчлен $y = ax^2 + bx + c$ с положительным старшим коэффициентом достигает минимума в точке $x_{min} = -\frac{b}{2a}$, в нашем случае — в точке 3. Поскольку функция $y = \sqrt{x}$ возрастающая, а заданная функция определена при найденном значении переменной, она достигает минимума в той же точке, в которой достигает минимума подкоренное выражение.

Ответ: 3.

Задание №13 решение и ответ:

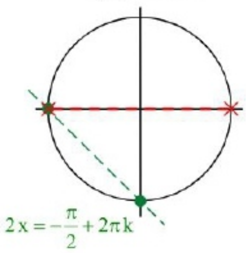
а) $1 + \operatorname{ctg} 2x = \frac{1}{\cos\left(\frac{3\pi}{2} - 2x\right)} \Leftrightarrow 1 + \frac{\cos 2x}{\sin 2x} = -\frac{1}{\sin 2x} \Leftrightarrow \begin{cases} \sin 2x + \cos 2x = -1, & (1) \\ \sin 2x \neq 0. & (2) \end{cases}$

Из уравнения (1) находим:

$$\sin 2x + \cos 2x = -1 \Leftrightarrow \frac{1}{\sqrt{2}}\cos 2x + \frac{1}{\sqrt{2}}\sin 2x = -\frac{1}{\sqrt{2}} \Leftrightarrow$$

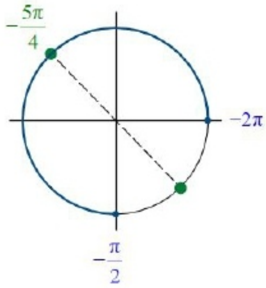
$$\Leftrightarrow \cos\left(2x - \frac{\pi}{4}\right) = -\frac{1}{\sqrt{2}} \Leftrightarrow \left[\begin{array}{ll} 2x = \pi + 2\pi k, & (a) \\ 2x = -\frac{\pi}{2} + 2\pi k, k \in \mathbb{Z}. & (b) \end{array}\right.$$

Аргумент $2x$



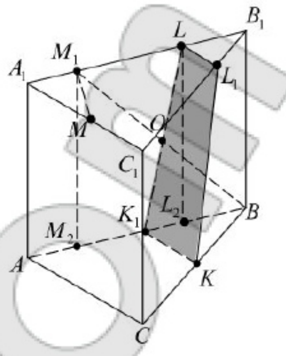
Так как решения уравнения (а) не удовлетворяют условию (2), то окончательно получаем $x = -\frac{\pi}{4} + \pi k, k \in \mathbb{Z}$.

б) Из решений, найденных в пункте а), промежутку $\left[-2\pi; -\frac{\pi}{2}\right]$ принадлежит только одно число: $-\frac{5\pi}{4}$.



Ответ: а) $\left\{-\frac{\pi}{4} + \pi k : k \in \mathbb{Z}\right\}$; б) $-\frac{5\pi}{4}$.

Задание №14 решение и ответ:



а) Отметим точки L_1 и K_1 на ребрах B_1C_1 и AB соответственно так чтобы $LL_1 \parallel A_1C_1$, $KK_1 \parallel AC$. Тогда плоскость γ это плоскость LL_1KK_1.

Очевидно $BM \perp KK_1$, поскольку проекция BM на плоскость ABC — высота треугольника ABC. Она перпендикулярна AC, а значит и KK_1. По теореме о трех перпендикулярах $BM \perp KK_1$.

Рассмотрим теперь проекцию M_1 точки M на плоскость AA_1B_1B. Поскольку проекция C_1 на эту плоскость — середина ребра A_1B_1, то $A_1M_1 = \frac{1}{4}A_1B_1 = 3$. Докажем теперь, что прямая BM_1 перпендикулярна K_1L. Тогда по теореме о трех перпендикулярах окажется что $BM \perp K_1L$, а тогда $BM \perp \gamma$.

Обозначим за O точку пересечения отрезков BM_1 и K_1L, за M_2 и L_2 — проекции точек M_1 и L на прямую AB. Тогда

$$\operatorname{tg}\angle OBK_1 = \operatorname{tg}\angle M_1BM_2 = \frac{M_1M_2}{M_2B} = \frac{3}{9} = \frac{1}{3},$$

$$\operatorname{tg}\angle OK_1B = \operatorname{tg}\angle LK_1L_2 = \frac{LL_2}{L_2K_1} = \frac{3}{6-5} = 3.$$

Итак, тангенсы этих углов обратны друг другу, поэтому углы в сумме дают 90° и угол K_1OB_1 = 180° - 90° = 90°, что и требовалось доказать.

б) Очевидно $LL_1 = 5$, так как B_1LL_1 — равносторонний треугольник.

$$V_{BLL_1KK_1} = V_{L_1BKK_1} + V_{LK_1BL_1} = \frac{1}{3}d(L_1, K_1BK)\cdot S_{K_1BK} + \frac{1}{6}K_1B\cdot LL_1\cdot d(K_1B, LL_1)\cdot \sin\angle(K_1B, LL_1) =$$
$$= \frac{1}{3}\cdot 3\cdot \frac{6^2\sqrt{3}}{4} + \frac{1}{6}\cdot 6\cdot 5\cdot d(ABC, A_1B_1C_1)\cdot \sin\angle(LB_1, LL_1) = 9\sqrt{3} + 5\cdot 3\cdot \frac{\sqrt{3}}{2} = \frac{33\sqrt{3}}{2}.$$

Ответ: $\frac{33\sqrt{3}}{2}$.

Задание №15 решение и ответ:

Обозначим $2^x = a$, $3^x = b$ и преобразуем неравенство:

$$\frac{3(a^2-5a+6)}{3-b} \le 2b-5a+6 \Leftrightarrow \frac{3a^2-5ab+2b^2}{3-b} \le 0 \Leftrightarrow$$
$$\Leftrightarrow \frac{(3a-2b)(a-b)}{3-b} \le 0 \Leftrightarrow \frac{(2b-3a)(b-a)}{b-3} \ge 0.$$

Вернёмся к исходной переменной:

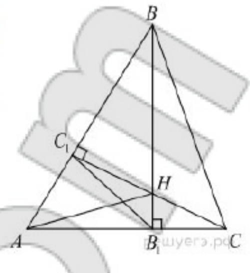
$$\frac{(2\cdot 3^x - 3\cdot 2^x)(3^x-2^x)}{3^x-3} \ge 0 \Leftrightarrow \frac{(3^x - 3\cdot 2^{x-1})(3^x-2^x)}{3^x-3} \ge 0 \Leftrightarrow \frac{(3^{x-1} - 2^{x-1})(3^x-2^x)}{3^x-3} \ge 0.$$

Первый множитель числителя положителен при $x > 1$ и отрицателен при $x < 1$, как и знаменатель. Второй множитель числителя положителен при $x > 0$ и отрицателен при $x < 0$. При $x = 0$ он равен нулю. Поэтому множество решений неравенства: $[0;1)\cup(1;\infty)$.

Ответ: $[0;1)\cup(1;\infty)$.

Задание №16 решение и ответ:

а) В четырёхугольнике AC_1HB_1 углы C_1 и B_1 — прямые, следовательно, около этого четырёхугольника можно описать окружность, причём AH — её диаметр. Вписанные углы AC_1B_1 и AHB_1 опираются на одну дугу, следовательно, $\angle AHB_1 = \angle AC_1B_1$.



Углы BC_1C и BB_1C — прямые, значит, точки B, C, B_1 и C_1 лежат на окружности с диаметром BC. Следовательно,

$$\angle AC_1B_1 = 180^\circ - \angle BC_1B_1 = \angle BCB_1.$$

Получаем, что $\angle ACB = \angle AHB_1$.

б) В треугольнике AB_1C_1 диаметр описанной окружности $AH = 4$, откуда

$$B_1C_1 = AH \cdot \sin\angle BAC = AH \cdot \sin 60^\circ = 2\sqrt{3}.$$

В прямоугольном треугольнике BB_1A имеем:

$$AB_1 = AB\cos\angle BAB_1 = AB\cos 60^\circ = \frac{1}{2}AB.$$

В прямоугольном треугольнике CC_1A имеем:

$$AC_1 = AC\cos\angle CAC_1 = AC \cdot \cos 60^\circ = \frac{1}{2}AC.$$

Получаем, что $\frac{AB}{AB_1} = \frac{AC}{AC_1}$. Треугольники ABC и AB_1C_1 имеют общий угол A и $\frac{AB}{AB_1} = \frac{AC}{AC_1}$, следовательно, они подобны. Тогда $\frac{BC}{B_1C_1} = \frac{AC}{AC_1} = 2$. Значит,

$$BC = 2B_1C_1 = 4\sqrt{3}.$$

Ответ: $4\sqrt{3}$.

Задание №17 решение и ответ:

Через n лет 1 сентября на первом счёте будет сумма (суммируем $n + 1$ член геометрической прогрессии)

$$1000 + 1000 \cdot 1,2 + \ldots + 1000 \cdot 1,2^n = 1000(1 + 1,2 + \ldots + 1,2^n) = 1000 \cdot \frac{1,2^{n+1} - 1}{1,2 - 1} = 5000(1,2^{n+1} - 1) \text{ (руб.)}.$$

В это же время на втором счёте будет сумма

$$2200 + 2200 \cdot 1,44 + \ldots + 2200 \cdot 1,44^{n-6} = 2200 \cdot \frac{1,44^{n-5} - 1}{1,44 - 1} = 5000(1,44^{n-5} - 1) \text{ (руб.)}.$$

Приравняем эти суммы и решим полученное уравнение:

$$5000(1,2^{n+1} - 1) = 5000(1,44^{n-5} - 1) \Leftrightarrow 1,2^{n+1} = 1,44^{n-5} \Leftrightarrow 1,2^{n+1} = 1,2^{2(n-5)} \Leftrightarrow n + 1 = 2n - 10 \Leftrightarrow n = 11.$$

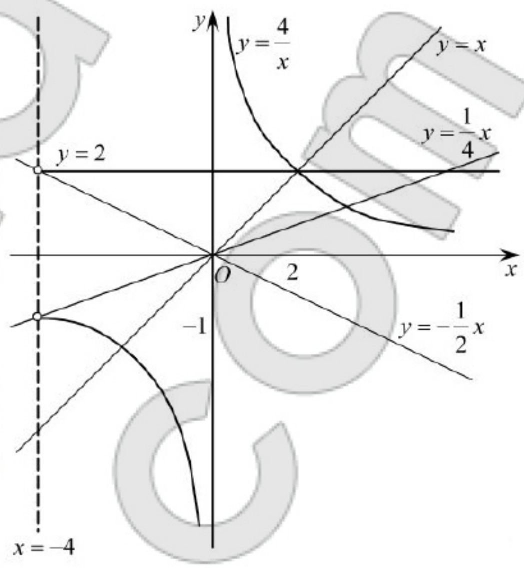
Таким образом, суммы на счетах сравняются через 11 лет после открытия первого вклада, то есть в 2019 году.

Ответ: 2019.

Задание №18 решение и ответ:

Графическое решение. Запишем первое уравнение системы в виде

$$\frac{(y-2)(xy-4)}{\sqrt{x+4}}=0.$$



При $x \le -4$ левая часть не имеет смысла. При $x > -4$ уравнение задаёт прямую $y=2$ и гиперболу $y=\frac{4}{x}$ (см. рис.). При каждом значении a уравнение $y=ax$ задаёт прямую с угловым коэффициентом a, проходящую через начало координат.

Число решений исходной системы равно числу точек пересечения прямой $y=2$ и гиперболы $y=\frac{4}{x}$ с прямой $y=ax$ при условии $x>-4$.

Прямая $y=ax$ пересекает прямую $y=2$ при $a<-\frac{1}{2}$ и при $a>0$; пересекает правую ветвь гиперболы при $a>0$, пересекает левую ветвь гиперболы при $a>\frac{1}{4}$, проходит через точку пересечения прямой $y=2$ и гиперболы при $a=1$.

Таким образом, исходная система имеет ровно два решения при $0<a\le\frac{1}{4}$ и при $a=1$.

Задание №19 решение и ответ:

а) $71+61=4(16+17)$, поэтому если взять по 11 раз числа 16 и 17, то получится подходящий пример.

б) Обозначим сумму всех цифр десятков за a, а всех цифр единиц за b. Тогда $10a+b=363$, $10b+a=2\cdot 363$, откуда $9(b-a)=363$, что невозможно — 363 не кратно 9.

в) Нужно максимизировать выражение $10b+a=10(363-10a)+a=3630-99a$, поэтому a следует сделать как можно меньше. С другой стороны, $9a\ge b$ (поскольку первая цифра числа меньше его последней цифры не более чем в 9 раз), поэтому $363=10a+b\le 19a$, откуда $a\ge 20$.

Приведем пример — $a=20$, $b=163$, что возможно, например, для трех чисел 19 и семнадцати чисел 18. Новая сумма тогда будет равна $17\cdot 81+3\cdot 91=1650$.

Ответ: а) 17 и 16; б) нет; в) 1650.