Ответы для варианта 29527683

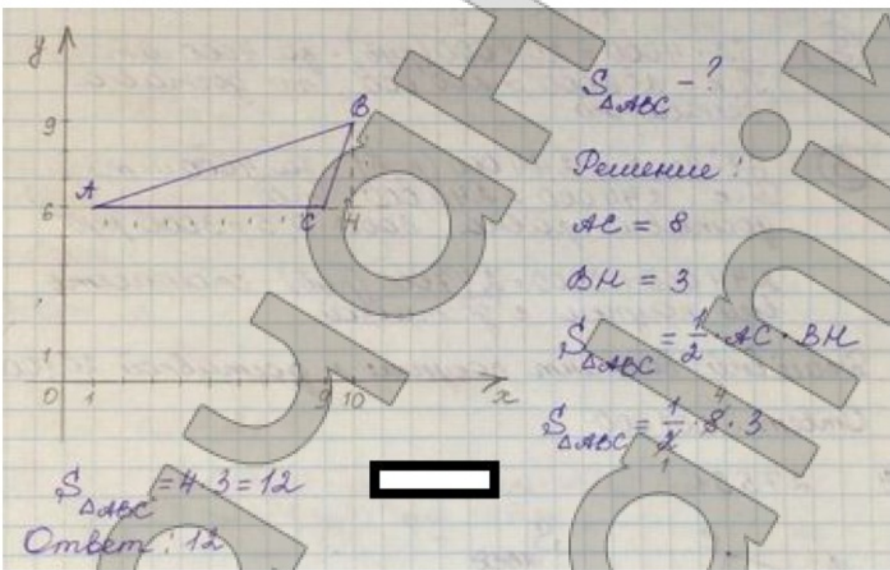
Задание №1 решение и ответ:

За 16 SMS-сообщений Маша заплатила 16 · 1,3 = 20,8 рубля. Значит, после отправки всех сообщений у Маши осталось: 30 − 20,8 = 9,2 рубля. Ответ: 9,2.

Задание №2 решение и ответ:

Ответ: 4

Задание №3 решение и ответ:



Задание №4 решение и ответ:

Натуральных чисел от 10 до 19 включительно десять, из них на три делятся три числа: 12, 15, 18. Следовательно, искомая вероятность равна 3:10 = 0,3. Ответ: 0,3.

Задание №5 решение и ответ:

Возведем в квадрат:

$$\sqrt{\frac{2x+5}{3}} = 5 \Leftrightarrow \frac{2x+5}{3} = 25 \Leftrightarrow 2x+5 = 75 \Leftrightarrow x = 35.$$

Ответ: 35.

Задание №6 решение и ответ:

Известно, что $r = \frac{\sqrt{3}}{6}a$, а по условию $r = \frac{\sqrt{3}}{6}$. Поэтому длина стороны треугольника $a = 1$.

Ответ: 1.

Задание №7 решение и ответ:

Положительным значениям производной соответствует интервалы, на которых функция $f(x)$, возрастает. На них лежат точки x_1, x_2, x_6, x_7. Таких точек 4.

Ответ: 4.

Задание №8 решение и ответ:

Объем куба $V = a^3$ равен объему параллелепипеда

$$V = 4 \cdot 6 \cdot 9 = 216.$$

Значит для ребра куба имеем:

$$a = \sqrt[3]{216} = 6.$$

Ответ: 6.

Задание №9 решение и ответ:

Используем свойство пропорции:

$$\frac{3\sin\alpha - 5\cos\alpha + 2}{\sin\alpha + 3\cos\alpha + 6} = \frac{1}{3} \Leftrightarrow 3(3\sin\alpha - 5\cos\alpha + 2) = \sin\alpha + 3\cos\alpha + 6 \Leftrightarrow \ \Leftrightarrow 8\sin\alpha = 18\cos\alpha \Leftrightarrow \operatorname{tg}\alpha = \frac{18}{8} \Leftrightarrow \operatorname{tg}\alpha = \frac{9}{4}.$$

Следовательно, $\operatorname{tg}\alpha = 2,25$.

Ответ: 2,25.

Задание №10 решение и ответ:

Поскольку показатели максимальны, они равны 5. Подставим значения в формулу:

$$1 = \frac{10 + 5 + 15 + 5}{A} \Leftrightarrow A = 35.$$

Ответ: 35.

Задание №11 решение и ответ:

Пусть u км/ч – скорость течения реки, тогда скорость лодки по течению равна $11+u$ км/ч, а скорость лодки против течения равна $11-u$ км/ч. На обратный путь лодка затратила на 6 часов меньше, отсюда имеем:

$$\frac{112}{11-u}-\frac{112}{11+u}=6 \Leftrightarrow \frac{224u}{(11-u)(11+u)}=6 \Leftrightarrow \frac{112u}{121-u^2}=3 \underset{u>0}{\Leftrightarrow}$$

$$\Leftrightarrow 112u=3(121-u^2) \Leftrightarrow 3u^2+112u-363=0 \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} u=\dfrac{-56+\sqrt{56^2+3\cdot 363}}{3}; \\ u=\dfrac{-56-\sqrt{56^2+3\cdot 363}}{3} \end{array}\right. \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} u=3; \\ u=-\dfrac{121}{3} \end{array}\right. \underset{u>0}{\Leftrightarrow} u=3.$$

Таким образом, скорость течения реки равна 3 км/ч.

Ответ: 3.

Задание №12 решение и ответ:

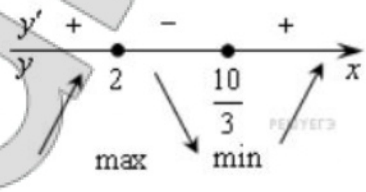
Найдем производную заданной функции:

$$y'=((x-2)^2)'(x-4)+(x-2)^2(x-4)'+(5)'=$$
$$=2(x-2)(x-4)+(x-2)^2=(x-2)\cdot(2(x-4)+(x-2))=(x-2)(3x-10).$$

Найдем нули производной:

$$(x-2)(3x-10)=0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x=2, \\ x=\dfrac{10}{3}. \end{array}\right.$$

Определим знаки производной функции и изобразим на рисунке поведение функции:

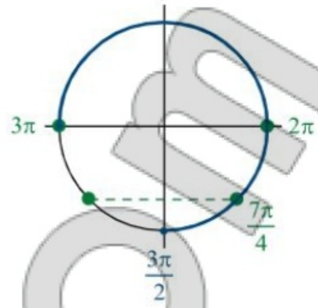


Искомая точка максимума $x=2$.

Ответ: 2.

Задание №13 решение и ответ:

Имеем:



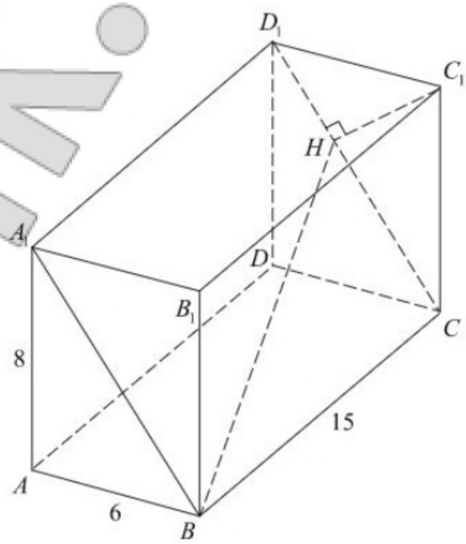
$$1-2\sin^2 x-\sqrt{2}\sin x-1=0 \Leftrightarrow \sin x(\sin x+\frac{\sqrt{2}}{2})=0 \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \left[\begin{array}{l}\sin x=0,\\ \sin x=-\dfrac{\sqrt{2}}{2}\end{array}\right. \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l}x=\pi k,\\ x=-\dfrac{3\pi}{4}+2\pi k,\\ x=-\dfrac{\pi}{4}+2\pi k.\end{array}\right. \; k\in\mathbb{Z}$$

б) На указанном промежутке лежат точки $2\pi,\ 3\pi,\ \frac{7\pi}{4}$.

Ответ: а) $\left\{-\frac{3\pi}{4}+2\pi k, -\frac{\pi}{4}+2\pi k, \pi k : k\in\mathbb{Z}\right\}$; б) $2\pi,\ 3\pi,\ \frac{7\pi}{4}$.

Задание №14 решение и ответ:



а) Противоположные грани прямоугольного параллелепипеда — равные прямоугольники, поэтому их диагонали равны. Таким образом, $AC=B_1D_1$, $CB_1=AD_1$, $AB_1=CD_1$. Значит все грани равны по третьему признаку равенства треугольников.

б) Сечение плоскостью A_1BC есть прямоугольник A_1BCD_1.

Из точки C_1 проведем перпендикуляр C_1H к CD_1. BH — проекция BC_1 на плоскость A_1BC. Значит, нужно найти угол C_1BH.

В прямоугольном треугольнике D_1C_1C находим:

$$C_1H=\frac{D_1C_1\cdot C_1C}{D_1C}=\frac{24}{5}.$$

В прямоугольном треугольнике BCC_1 находим: $BC_1=17$.

В прямоугольном треугольнике C_1HB находим: $\sin\angle B=\frac{C_1H}{BC_1}=\frac{24}{85}$.

Ответ: $\arcsin\frac{24}{85}$.

Задание №15 решение и ответ:

Заметим, что

$$(4\cdot 2^{\lg(10x)})^{1+\lg x}=(4\cdot 2^{1+\lg x})^{1+\lg x}=4^{1+\lg x}\cdot 2^{(1+\lg x)^2}=2^{2(1+\lg x)}\cdot 2^{(1+\lg x)^2}=2^{1+\lg x}\cdot 2^{1+\lg x}\cdot 2^{(1+\lg x)^2}=$$
$$=2^{1+\lg x}\cdot 2^{1+\lg x}\cdot 2^{\lg^2 x+2\lg x+1}=2^{1+\lg x}\cdot 2^{1+\lg x+\lg^2 x+2\lg x+1}=2^{1+\lg x}\cdot 2^{\lg^2 x+3\lg x+2}$$

Преобразуем обе части неравенства:

$$\frac{2^{1+\lg x}\cdot 7^{1+\lg x}}{7(\lg x+2)^2(\lg x-1)}\geq\frac{2^{2(1+\lg x)}\cdot 2^{(1+\lg x)^2}}{4(\lg x+2)^2(\lg x-1)}\Leftrightarrow\frac{2^{1+\lg x}\cdot 7^{1+\lg x}}{7(\lg x+2)^2(\lg x-1)}\geq\frac{2^{(1+\lg x)}\cdot 2^{\lg x^2+3\lg x+2}}{4(\lg x+2)^2(\lg x-1)}.$$

Разделив обе части на $2^{1+\lg x}$ и сократив левую часть на 7, а правую на 4, получим:

$$\frac{7^{\lg x}}{(\lg x+2)^2(\lg x-1)}\geq\frac{2^{\lg^2 x+3\lg x}}{(\lg x+2)^2(\lg x-1)}\Leftrightarrow\frac{7^{\lg x}-2^{\lg^2 x+3\lg x}}{(\lg x+2)^2(\lg x-1)}\geq 0\Leftrightarrow\frac{2^{\log_2 7\lg x}-2^{\lg^2 x+3\lg x}}{(\lg x+2)^2(\lg x-1)}\geq 0.$$

Сделаем замену: $y=\lg x$, тогда получим

$$\frac{2^{y\log_2 7}-2^{y^2+3y}}{(y+2)^2(y-1)}\geq 0,$$

откуда методом рационализации, получим

$$\frac{y\cdot\log_2 7-(y^2+3y)}{(y+2)^2(y-1)}\geq 0\Leftrightarrow\frac{y(y-(\log_2 7-3))}{(y+2)^2(y-1)}\leq 0.$$

Решим полученное рациональное неравенство:

$$\left[\begin{array}{l}-\infty<y<-2,\\ -2<y\leq\log_2 7-3,\\ 0\leq y<1.\end{array}\right.$$

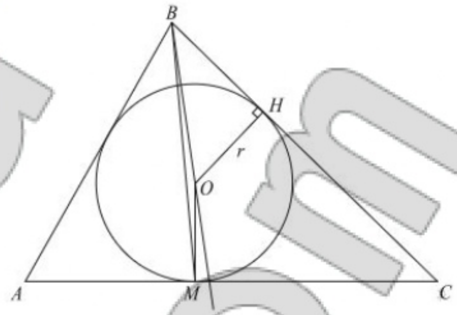
Тогда

$$\left[\begin{array}{l}0<x<\dfrac{1}{100},\\ \dfrac{1}{100}<x\leq 10^{\log_2 7-3},\\ 1\leq x<10.\end{array}\right.$$

Ответ: $\left(0;\ \dfrac{1}{100}\right)\cup\left(\dfrac{1}{100};\ 10^{\log_2 7-3}\right]\cup[1;\ 10).$

Задание №16 решение и ответ:

а) Пусть O — центр вписанной окружности. Проведём $OH \perp BC$, в треугольнике BHO катет OH лежит напротив угла в 30°, поэтому $BO = 2OH = 2r$. Тогда в силу неравенства треугольника имеем: $BM \leq BO + OM \leq 3r$ что и требовалось доказать.



б) Запишем теорему косинусов для треугольника BOM: $BO^2 = BM^2 + OM^2 - 2BM \cdot OM \cos\angle BMO$, откуда

$$(2r)^2 = \left(\frac{5}{2}r\right)^2 + r^2 - 2 \cdot \frac{5}{2}r \cdot r\cos\angle BMO \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow 4r^2 = \frac{25}{4}r^2 + r^2 - 5r^2\cos\angle BMO \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \cos\angle BMO = \frac{\frac{29}{4}r^2 - 4r^2}{5r^2} \Leftrightarrow \cos\angle BMO = \frac{13}{20}.$$

Осталось заметить, что

$$\sin\angle BMC = \sin(90^\circ + \angle BMO) = \cos\angle BMO = 0,65.$$

Ответ: 0,65.

Задание №17 решение и ответ:

Не снижая общности рассуждений, примем начальную сумму кредита за 100 руб. и будем считать, что выплаты производились 10 числа каждого месяца. Составим таблицу выплат:

Дата	14.02	14.03	14.04	14.05	14.06	14.07
Долг, руб.	105	94,5	84	73,5	63	52,5
Выплата, руб.	15	14,5	14	13,5	13	52,5
Остаток долга на день выплаты, руб.	90	80	70	60	50	0
Остаток долга на день выплаты, %	90%	80%	70%	60%	50%	0%

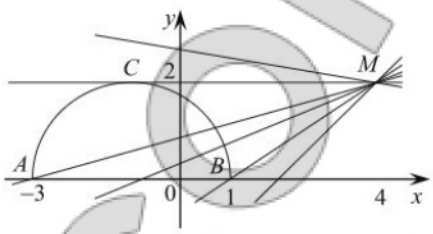
Тем самым, полная сумма выплат равна 15 + 14,5 +14 +13,5 +13 + 52,5 = 122,5 руб., переплата составила 22,5%.

Ответ: 22,5.

Задание №18 решение и ответ:

Запишем уравнение в виде $\sqrt{3-2x-x^2}=-ax+4a+2$ Рассмотрим две функции: $f(x)=\sqrt{3-2x-x^2}$ и $g(x)=-ax+4a+2=-a(x-4)+2$. Графиком функции $f(x)=\sqrt{3-2x-x^2}$ является полуокружность радиуса 2 с центром в точке $(-1,0)$, лежащая в верхней полуплоскости. При каждом значении a графиком функции $g(x)$ является прямая с угловым коэффициентом $-a$, проходящая через точку $M(4,2)$.

Уравнение имеет единственный корень, если графики функций $f(x)$ и $g(x)$ имеют единственную общую точку: либо прямая касается полуокружности, либо пересекает её в единственной точке.



Касательная MC, проведённая из точки M к полуокружности, имеет угловой коэффициент, равный нулю, то есть при $a=0$ исходное уравнение имеет единственный корень. При $-a<0$ прямая не имеет общих точек с полуокружностью.

Прямая MA, заданная уравнением $y=-ax+4a+2$, проходит через точки $M(4,2)$ и $A(-3,0)$, следовательно, её угловой коэффициент $-a=\frac{2}{7}$. При $0<-a\le\frac{2}{7}$ прямая, заданная уравнением $y=-ax+4a+2$, имеет угловой коэффициент не больше, чем у прямой MA, и пересекает полуокружность в двух точках. При $\frac{2}{7}<-a\le\frac{2}{3}$ прямая, заданная уравнением $y=-ax+4a+2$, имеет угловой коэффициент больше, чем у прямой MA, и не больше, чем у прямой MB, и пересекает полуокружность в единственной точке. Получаем, что при $-\frac{2}{3}\le a<-\frac{2}{7}$ исходное уравнение имеет единственный корень. При $-a>\frac{2}{3}$ прямая не имеет общих точек с полуокружностью.

Ответ: $\left[-\frac{2}{3},-\frac{2}{7}\right)\cup\{0\}$.

Задание №19 решение и ответ:

а) Разобьём множество $\{100,\ 101,\ 102,\ \ldots,\ 199\}$ на два множества пятидесятиэлементных множества следующим образом:

$$\{100,\ 199,\ 102,\ 197,\ 104,\ 195,\ \ldots,\ 148,\ 151\},$$

$$\{101;\ 198;\ 103;\ 196;\ 105,\ 194,\ \ldots,\ 149,\ 150\}.$$

Сумма чисел в этих двух подмножествах одинакова, поэтому исходное множество является хорошим. (Возможны и другие примеры.)

б) Заметим, сумма чисел в подмножестве, которое будет содержать число 2^{200}, будет больше суммы чисел в другом подмножестве, поскольку 2^{200} больше суммы всех остальных чисел:

$$2+4+\ldots+2^{198}+2^{199}<1+2+4+\ldots+2^{198}+2^{199}=2^{200}-1<2^{200}.$$

Следовательно, множество $\{2;\ 4;\ 8;\ \ldots;\ 2^{200}\}$ не является хорошим.