Ответы для варианта 29527678

Задание №1 решение и ответ:

Найдем стоимость покупки: 1 кг 200 г клубники стоит $1{,}2 \cdot 80 = 96$ рублей. Значит, с 500 рублей мама получит сдачи $500 - 96 = 404$ рубля. Ответ: 404.

Задание №2 решение и ответ:

Из диаграммы видно, что среднемесячная температура воздуха в Кемерово ниже −10 градусов Цельсия в январе, феврале и декабре, а в остальные месяцы она выше. Ответ: 9.

Задание №3 решение и ответ:

Площадь треугольника равна половине произведения основания на высоту, проведенную к этому основанию или его продолжению. Поэтому

$$S = \frac{1}{2} \cdot 6 \cdot 2 = 6 \text{ см}^2.$$

Ответ: 6.

Задание №4 решение и ответ:

Всего возможных исходов — четыре: орел-орел, орел-решка, решка-орел, решка-решка. Благоприятным является один: орел-решка. Следовательно, искомая вероятность равна 1 : 4 = 0,25. Ответ: 0,25.

Задание №5 решение и ответ:

Перейдем к одному основанию степени:

$$\left(\frac{1}{3}\right)^{x-8} = \frac{1}{9} \Leftrightarrow \left(\frac{1}{3}\right)^{x-8} = \left(\frac{1}{3}\right)^{2} \Leftrightarrow x - 8 = 2 \Leftrightarrow x = 10.$$

Ответ: 10.

Задание №6 решение и ответ:

Радиус вписанной в трапецию окружности равен половине ее высоты, то есть половине AD. В четырехугольник можно вписать окружность тогда и только тогда, когда суммы длин противоположных сторон равны. Следовательно, $AB + CD = BC + AD = 11$. Большая боковая сторона $CD = 7$, следовательно, меньшая $AD = 4$. Тогда $r = 2$.

Ответ: 2.

Задание №7 решение и ответ:

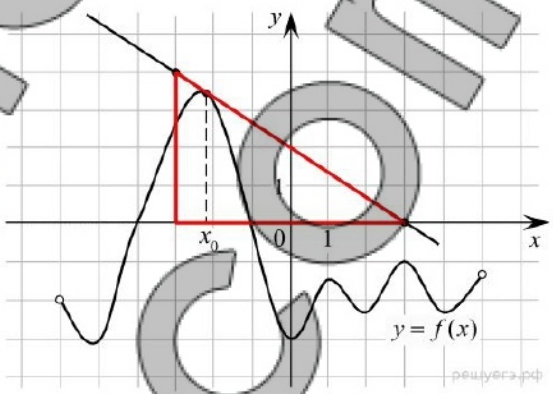
Найдём производную функции $g(x)$:

$$g'(x) = 6 \cdot f'(x) - 3.$$

По рисунку найдём значение $f'(x_0)$. Значение производной в точке касания равно угловому коэффициенту касательной, который, в свою очередь, равен тангенсу угла наклона данной касательной к оси абсцисс. Поэтому $f'(x_0) = -\frac{2}{3}$.

Тогда для искомого значение получаем

$$g'(x_0) = 6 \cdot f'(x_0) - 3 = 6 \cdot \left(-\frac{2}{3}\right) - 3 = -7.$$

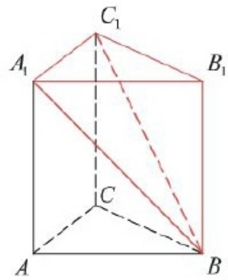


Ответ: −7.

Задание №8 решение и ответ:

Искомый объём многогранника равен разности объёмов призмы $ABCA_1B_1C_1$ и пирамиды $BA_1B_1C_1$, основания и высоты которых совпадают. Поэтому

$$V_{\text{мног}} = S_{\text{пр}}h_{\text{пр}} - \frac{1}{3}S_{\text{пир}}h_{\text{пир}} = 3 \cdot 2 - \frac{1}{3} \cdot 3 \cdot 2 = 4.$$



Ответ: 4.

Задание №9 решение и ответ:

Используем формулу косинуса двойного угла $\cos 2\alpha = 1 - 2\sin^2\alpha$. Имеем:

$$24\cos 2\alpha = 24(1 - 2 \cdot 0,04) = 24 \cdot 0,92 = 22,08.$$

Ответ: 22,08.

Задание №10 решение и ответ:

Задача сводится к решению неравенства $t \geq 21$ при заданных значениях начального напряжения на конденсаторе $U_0 = 16$ кВ, сопротивления резистора $R = 5 \cdot 10^6$ Ом и ёмкости конденсатора $C = 2 \cdot 10^{-6}$ Ф:

$$t \geq 21 \Leftrightarrow 0,7 \cdot 2 \cdot 10^{-6} \cdot 5 \cdot 10^6 \cdot \log_2 \frac{16}{U} \geq 21 \Leftrightarrow \log_2 \frac{16}{U} \geq 3 \Leftrightarrow \frac{16}{U} \geq 8 \Leftrightarrow U \leq 2 \text{ кВ}.$$

Ответ: 2.

Задание №11 решение и ответ:

Скорость плота равна скорости течения реки 2 км/ч. Пусть u км/ч – скорость яхты, тогда скорость яхты по течению равна $u+2$ км/ч, а скорость яхты против течения равна $u-2$ км/ч. Яхта, прибыв в пункт B, тотчас повернула обратно и возвратилась в A, а плоту понадобилось на час больше времени, чтобы пройти 24 км.

$$\frac{120}{u+2}+\frac{120}{u-2}+1=\frac{24}{2} \Leftrightarrow \frac{240u}{u^2-4}=11 \Leftrightarrow 11u^2-240u-44=0 \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} u=\dfrac{240+\sqrt{240^2+44^2}}{22}=22; \\ u=\dfrac{240-\sqrt{240^2+44^2}}{22}=-\dfrac{2}{11} \end{array}\right. \underset{u>0}{\Leftrightarrow} u=22.$$

Ответ: 22.

Задание №12 решение и ответ:

Найдем производную заданной функции:

$$y'=\frac{16}{\cos^2 x}-16=16\left(\frac{1}{\cos^2 x}-1\right)=16\mathrm{tg}^2\, x.$$

Найденная производная неотрицательна на заданном отрезке, заданная функция возрастает на нем, поэтому наибольшим значением функции на отрезке является

$$y\left(\frac{\pi}{4}\right)=16\mathrm{tg}\,\frac{\pi}{4}-16\cdot\frac{\pi}{4}+4\pi-5=11.$$

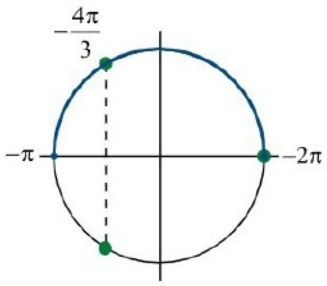
Ответ: 11.

Задание №13 решение и ответ:

а) Преобразуем уравнение:

$$2\cos^2 x-1=\cos x \Leftrightarrow 2\cos^2 x-\cos x-1=0 \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} \cos x=1, \\ \cos x=-\dfrac{1}{2}, \end{array}\right. \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x=2\pi k, \\ x=\pm\dfrac{2\pi}{3}+2\pi k, \end{array}\right. k\in\mathbb{Z}.$$

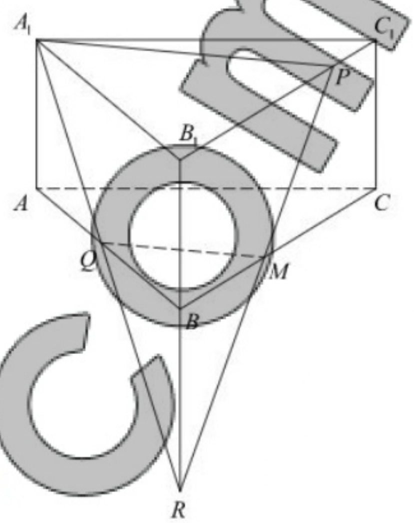


б) Отберём с помощью единичной окружности корни уравнения, принадлежащие промежутку $[-2\pi; -\pi]$: $-2\pi;\ -\frac{4\pi}{3}$.

Ответ: а) $\left\{2\pi k, \pm\frac{2\pi}{3}+2\pi k : k\in\mathbb{Z}\right\}$; б) $-2\pi,\ -\frac{4\pi}{3}$.

Задание №14 решение и ответ:

а) Пусть прямые A_1Q и BB_1 пересекаются в точке R (см. рисунок). Тогда точка M — точка пересечения прямых PR и BC.



Треугольники A_1B_1R и QBR подобны, откуда

$$\frac{BR}{B_1R} = \frac{QB}{A_1B_1} = \frac{2}{3};$$

$$RB = 2BB_1 = 4.$$

Треугольники PB_1R и MBR подобны, откуда

$$\frac{BM}{B_1P} = \frac{BR}{B_1R} = \frac{2}{3};$$

$$BM = \frac{2}{3}B_1P = 6.$$

Значит, M — середина BC.

б) Расстояние от точки B до плоскости A_1PQ равно высоте h пирамиды $BRQM$, опущенной из вершины B. Значит, с одной стороны, объём пирамиды $BRQM$

$$V_{BRQM} = \frac{1}{3}\cdot RB\cdot S_{QMB} = \frac{1}{3}\cdot RB\cdot\frac{1}{2}BQ\cdot BM\cdot\sin 60^\circ = 16\sqrt{3}.$$

С другой стороны, $V_{BRQM} = \frac{1}{3}\cdot h\cdot S_{QMR}$. Таким образом,

$$h = \frac{3\cdot 16\sqrt{3}}{S_{QMR}}.$$

Найдем стороны треугольника QMR:

$$QM = \sqrt{BQ^2 + BM^2 - 2\cdot BQ\cdot BM\cdot\cos 60^\circ} = 2\sqrt{13},$$
$$MR = \sqrt{BM^2 + BR^2} = 2\sqrt{13},$$
$$QR = \sqrt{BQ^2 + BR^2} = 4\sqrt{5}.$$

Площадь равнобедренного треугольника QMR равна

$$S_{QMR} = \frac{1}{2}\cdot QR\cdot\sqrt{QM^2 - \frac{QR^2}{4}} = 8\sqrt{10}.$$

Следовательно, $h = \frac{3\cdot 16\sqrt{3}}{8\sqrt{10}} = \frac{3\sqrt{30}}{5}$.

Ответ: $\frac{3\sqrt{30}}{5}$.

Задание №15 решение и ответ:

Сделаем замену $y = 2^{-x}$.

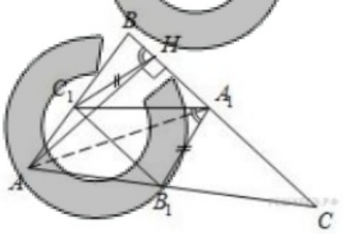
$$\frac{320 - 0,25y^2}{128 - y} \geq 2,5 \Leftrightarrow \frac{-0,25y^2 + 2,5y}{128 - y} \geq 0 \Leftrightarrow \frac{0,25y(y-10)}{128 - y} \leq 0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} 0 \leq y \leq 10 \\ y > 128. \end{array}\right.$$

Тогда $0 \leq 2^{-x} \leq 10$ или $2^{-x} > 128$, откуда находим множество решений неравенства: $(-\infty, -7)\cup[-\log_2 10, +\infty)$.

Ответ: $(-\infty, -7)\cup[-\log_2 10, +\infty)$.

Задание №16 решение и ответ:

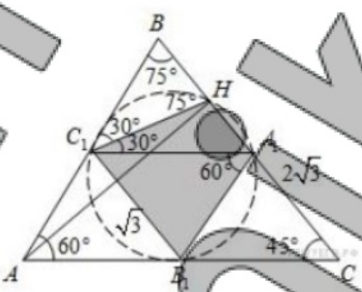
а) Заметим, что C_1H — медиана прямоугольного треугольника ABH, значит, $C_1H = \frac{1}{2}AB = AC_1 = BC_1$, но и $A_1B_1 = \frac{1}{2}AB$ как средняя линия треугольника ABC. Поэтому четырёхугольник $C_1HA_1B_1$ — равнобедренная трапеция, вокруг неё можно описать окружность, а значит, точки A_1, B_1, C_1 и H лежат на одной окружности. Что и требовалось доказать.



б) Середины сторон треугольника являются вершинами подобного ему треугольника. Поэтому верны равенства: $\angle C_1A_1B_1 = \angle A = 60^\circ$, $\angle A_1C_1B_1 = \angle C = 45^\circ$. Кроме того из п. а) $\angle BC_1H = 180^\circ - 2\angle B = 30^\circ$. Следовательно,

$$\angle HC_1A_1 = \angle BC_1A_1 - \angle BC_1H = 60^\circ - 30^\circ = 30^\circ.$$

Пусть R — радиус окружности, описанной вокруг трапеции. Эта окружность одновременно описана вокруг треугольников $A_1C_1B_1$ и A_1C_1H. Тогда по теореме синусов для каждого из них, имеем:



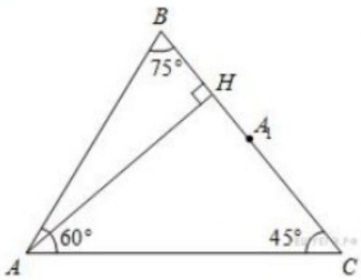
$$2R = \frac{HA_1}{\sin\angle HC_1A_1} = \frac{B_1C_1}{\sin\angle C_1A_1B_1},$$

откуда находим $HA_1 = \sqrt{3}\frac{\sin 30^\circ}{\sin 60^\circ} = 1$.

Приведем другое решение пункта а) Так как C_1H — медиана прямоугольного треугольника ABH, треугольник BC_1H равнобедренный, тогда $\angle C_1HB = \angle C_1BH = 75^\circ$, откуда $\angle C_1HA_1 = 105^\circ$. Поскольку $\angle C_1B_1A_1 = ABC = 75^\circ$, сумма противоположных углов четырёхугольника $C_1HA_1B_1$ равна 180°, а значит, он является вписанным.

Приведём решение пункта б) без использования пункта а).

Найдем сторону AB треугольника ABC по теореме синусов:



$$\frac{AB}{\sin C} = \frac{BC}{\sin A} \Leftrightarrow AB = 2\sqrt{3}\frac{\sin 45^\circ}{\sin 60^\circ} = 2\sqrt{2}.$$

Найдем катет прямоугольного треугольника AHB:

$$BH = AB\cos 75^\circ = 2\sqrt{2}\cos 75^\circ.$$

Тогда длина искомого отрезка A_1H:

$$A_1H = BA_1 - BH = \sqrt{3} - 2\sqrt{2}\cos 75^\circ.$$

Замечание. Покажем, что полученная длина равна 1. Действительно, поскольку

$$\cos 75^\circ = \cos(45^\circ + 30^\circ) = \cos 45^\circ\cos 30^\circ - \sin 45^\circ\sin 30^\circ = \frac{\sqrt{6} - \sqrt{2}}{4},$$

имеем:

$$A_1H = BA_1 - BH = \sqrt{3} - 2\sqrt{2}\left(\frac{\sqrt{6}}{4} - \frac{\sqrt{2}}{4}\right) = \sqrt{3} - (\sqrt{3} - 1) = 1.$$

Ответ: б) 1.

Задание №17 решение и ответ:

Пусть для определенности Миша и Маша 15.01.12 положили в банк x рублей. Подготовим выписки из лицевых счетов Маши и Миши.

Выписка из лицевого счета Маши.

Дата операции	Произведенная операция и на какую сумму		Остаток на счете клиента (руб.)
	Наименование операции	На какую сумму (руб.)/ размер в %	
15.01.12	Принято от клиента	x	x
15.01.13	Начислено на остаток	10%	$1{,}1x$
15.01.13	Принято от клиента	5000	$1{,}1x + 5000$
15.01.14	Начислено на остаток	10%	$1{,}1^2x + 5500$
15.01.14	Выдано клиенту	5000	$1{,}1^2x + 500$
15.01.15	Начислено на остаток	10%	$1{,}1^3x + 550$
15.01.15	Выдано клиенту	$1{,}1^3x + 550$	0

Выписка из лицевого счета Миши.

Дата операции	Произведенная операция и на какую сумму		Остаток на счете клиента (руб.)
	Наименование операции	На какую сумму (руб.)/ размер в %	
15.01.12	Принято от клиента	x	x
15.01.13	Начислено на остаток	10%	$1{,}1x$
15.01.13	Выдано клиенту	5000	$1{,}1x - 5000$
15.01.14	Начислено на остаток	10%	$1{,}1^2x - 5500$
15.01.14	Принято от клиента	5000	$1{,}1^2x - 500$
15.01.15	Начислено на остаток	10%	$1{,}1^3x - 550$
15.01.15	Выдано клиенту	$1{,}1^3x - 550$	0

Итак, Маша получила на 1100 руб. больше, чем Миша.

Ответ: Маша, на 1100 рублей.

Задание №18 решение и ответ:

Преобразуем систему, получим:

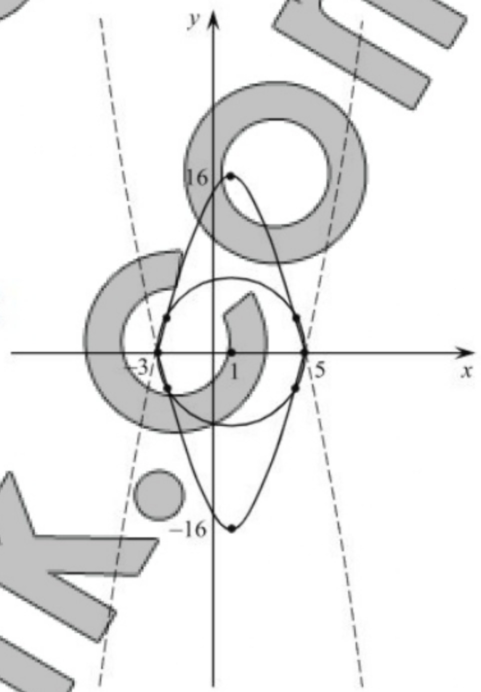
$$\begin{cases} (x-1)^2+|y|=16, \\ (x-1)^2+y^2=a^2. \end{cases}$$

Первое уравнение задает части двух парабол (см. рисунок):

$$y=\begin{cases} 16-(x-1)^2,\ y\ge 0, \\ (x-1)^2-16,\ y<0. \end{cases}$$

Второе уравнение задает окружность радиусом $|a|$ с центром $(1,0)$. На рисунке видно, что шесть решений системы получаются, только если окружность проходит через точки $(-3,0)$ и $(5,\ 0)$, пересекая параболу еще в четырех точках.

При этом радиус окружности равен 4, откуда $a=-4$ или $a=4$.



Ответ: $-4, 4$.

Задание №19 решение и ответ:

а) Например, для набора чисел {24; 25; ...; 47} Васин результат равен $24\cdot 25\cdot\ldots\cdot 47$, Петин результат равен $25\cdot 26\cdot\ldots\cdot 48$, то есть в два раза больше.

б) От добавления новых чисел отношение результатов Пети и Васи становиться только больше. Значит, наибольшее отношение будет, если Вася перемножит все натуральные числа из отрезка [23; 84]. В этом случае Васин результат равен $23\cdot 24\cdot 25\cdot\ldots\cdot 84$, а Петин результат равен $24\cdot 25\cdot 26\cdot\ldots\cdot 85$. Отношение этих чисел равно $\frac{85}{23}<6$. Значит, Петин результат не может быть ровно в 6 раз больше Васиного.

в) В пункте б) было показано, что Петин результат превосходит Васин не более чем в $\frac{85}{23}$ раза. Наибольшее целое число, не большее $\frac{85}{23}$, — это 3.

Для набора чисел {23; 24; 25; ...; 68} Васин результат равен $23\cdot 24\cdot 25\cdot\ldots\cdot 68$, Петин результат равен $24\cdot 25\cdot 26\cdot\ldots\cdot 69$, то есть в три раза больше.

Значит, наибольшее целое отношение результатов Пети и Васи равно 3.

Ответ: а) да; б) нет; в) 3.