Ответы для варианта 29527690

Задание №1 решение и ответ:

Чтобы сварить 27 кг вишни, нужно купить $27 \cdot 1{,}5 = 40{,}5$ кг сахара. Значит, нужно купить 41 упаковку сахара. Ответ: 41.

Задание №2 решение и ответ:

Наибольшая - 21 градус

Наименьшая - 8 градусов

Разность: 21-8 = 13 градусов

Задание №3 решение и ответ:

Площадь параллелограмма равна произведению основания на высоту, проведенную к этому основанию или его продолжению. Поэтому

$$S = 3 \cdot 6 = 18 \text{ см}^2.$$

Ответ: 18.

Задание №4 решение и ответ:

В самолете 12 + 18 = 30 мест удобны пассажиру В., а всего в самолёте 300 мест. Поэтому вероятность того, что пассажиру В. достанется удобное место равна 30 : 300 = 0,1. Ответ: 0,1.

Задание №5 решение и ответ:

Возведем в квадрат:

$$\sqrt{\frac{1}{1-5x}} = \frac{1}{6}. \Leftrightarrow \frac{1}{1-5x} = \frac{1}{36} \Leftrightarrow 1-5x = 36 \Leftrightarrow x = -7.$$

Ответ: −7.

Задание №6 решение и ответ:

$$\angle AOE = \frac{1}{2}(\angle C + \angle A) = \frac{90^\circ}{2} + \frac{32^\circ}{2} = 61^\circ.$$

Ответ: 61.

Задание №7 решение и ответ:

Прямая $y = kx + b$ является касательной к графику функции $f(x)$ в точке x_0 тогда и только тогда, когда одновременно $f(x_0) = y(x_0)$ и $f'(x_0) = k$. В нашем случае имеем:

$$\begin{cases} 2ax_0 + 2 = 3, \\ ax_0^2 + 2x_0 + 3 = 3x_0 + 1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} ax_0 = 0,5, \\ 0,5x_0 - x_0 = -2 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} a = 0,125, \\ x_0 = 4. \end{cases}$$

Искомое значение a равно 0,125.

Ответ: 0,125.

Задание №8 решение и ответ:

Боковые грани исходной призмы вдвое больше соответствующих боковых граней отсеченной призмы, поэтому площадь боковой поверхности исходной призмы равна 74.

Задание №9 решение и ответ:

В силу нечетности и периодичности синуса $\sin(\alpha - 7\pi) = -\sin(7\pi - \alpha) = -\sin(\pi - \alpha)$. Далее по формулам приведения имеем:

$$-5\sin(\pi - \alpha) - 11\cos\left(\frac{3\pi}{2} + \alpha\right) = -5\sin\alpha - 11\sin\alpha = -16\sin\alpha = -16\cdot(-0,25) = 4.$$

Ответ: 4.

Задание №10 решение и ответ:

Найдем скорость груза через 1 секунду после начала колебаний:

$$v = v_0\cos\frac{2\pi t}{T} = 0,5\cdot\cos\frac{2\pi\cdot 1}{2} = 0,5\cdot\cos\pi = 0,5\cdot(-1) = -0,5\text{м/с}$$

Найдем кинетическую энергию груза через 1 секунду после начала колебаний:

$$E = \frac{mv^2}{2} = \frac{0,08\cdot(-0,5)^2}{2} = 0,01$$

Ответ: 0,01

Задание №11 решение и ответ:

Первый мастер выполняет 1/12 работы в час, а второй — 1/6 работы в час. Следовательно, работая вместе, мастера выполняют $\frac{1}{12}+\frac{1}{6}=\frac{1}{4}$ работы в час. Поэтому всю работу мастера выполнят за 4 часа.

Другое рассуждение.

Время работы равно отношению объёма к скорости её выполнения. Поэтому два мастера, работая вместе, выполнят заказ за

$$\frac{1}{\frac{1}{12}+\frac{1}{6}}=\frac{1}{\frac{1}{4}}=4 \text{ часа.}$$

Ответ: 4.

Задание №12 решение и ответ:

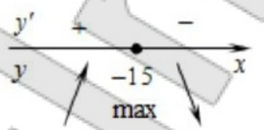
Найдем производную заданной функции:

$$y'=(x+16)'e^{16-x}+(x+16)(e^{16-x})'=e^{16-x}+(16+x)e^{16-x}(-1)=-(x+15)e^{16-x}.$$

Найдем нули производной:

$$-(x+15)e^{16-x}=0\Leftrightarrow x=-15.$$

Определим знаки производной функции и изобразим на рисунке поведение функции:



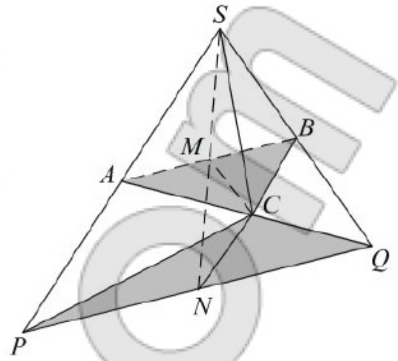
Искомая точка максимума $x=-15$.

Ответ: -15.

Задание №13 решение и ответ:

Задание №14 решение и ответ:

а) Пусть M — середина ребра AB, N — середина отрезка PQ. В равнобедренных треугольниках ASB и PSQ медианы SM и SN являются биссектрисами и высотами. Следовательно, точки S, M и N лежат на одной прямой. Треугольник PCQ равнобедренный, так как треугольники PAC и QBC равны, а значит, $PC = CQ$. В треугольниках ABC и PCQ высотами служат отрезки CM и CN соответственно. Из того, что отрезок PQ перпендикулярен отрезку SN и отрезку CN следует, что прямая PQ перпендикулярна плоскости SNC, но перпендикуляр к плоскости перпендикулярен любой прямой, лежащей в ней, следовательно, прямые PQ и SC перпендикулярны.



б) Из решения предыдущего пункта видно, что плоскость NSC перпендикулярна плоскостям ABC и PCQ, а потому $\angle MCN = \alpha$ искомый.

Найдём стороны треугольника MCN.

Ясно, что $MN = SM = \sqrt{SA^2 - AM^2} = 2\sqrt{10}$ и $CM = AM \cdot \sqrt{3} = 3\sqrt{3}$.

В треугольнике SBC имеем:

$$\cos\angle CSB = \frac{SB^2 + SC^2 - CB^2}{2 \cdot SB \cdot SC} = \frac{31}{49}.$$

Из треугольника SCQ по теореме косинусов находим

$$CQ^2 = CS^2 + SQ^2 - 2 \cdot CS \cdot SQ \cdot \cos\angle CSB = 121.$$

Следовательно, $CN = \sqrt{CQ^2 - NQ^2} = \sqrt{121 - 36} = \sqrt{85}$.

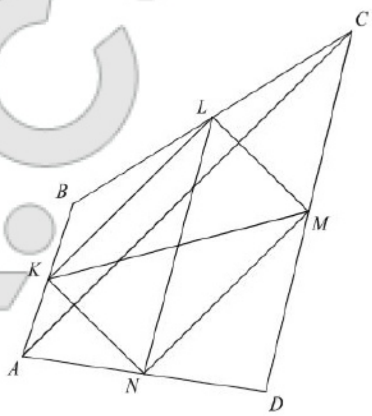
Из треугольника MCN по теореме косинусов находим $\cos\alpha = \dfrac{27 + 85 - 40}{2 \cdot 3\sqrt{3} \cdot \sqrt{85}} = \dfrac{4\sqrt{3}}{\sqrt{85}}$.

Ответ: $\arccos\dfrac{4\sqrt{3}}{\sqrt{85}}$.

Задание №15 решение и ответ:

Задание №16 решение и ответ:

а) Пусть K, L, M и N — середины сторон AB, BC, CD и AD четырёхугольника $ABCD$ соответственно. Тогда KL и MN — средние линии треугольников ABC и ADC. Значит, $KL = \frac{1}{2}AC = MN$ и $KL \parallel AC \parallel MN$, поэтому $KLMN$ — параллелограмм. Его диагонали KM и LN делят друг друга пополам, что и требовалось доказать.



б) В треугольнике KLM имеем:

$$KL^2 = KM^2 + ML^2 - 2KM \cdot ML \cdot \cos 60^\circ = 81.$$

Значит, $KL = 9$. Тогда $KM^2 = KL^2 + LM^2$, поэтому треугольник KLM прямоугольный треугольник с прямым углом при вершине L. Четырёхугольник $KLMN$ — прямоугольник, поэтому

$$S_{KLMN} = KL \cdot LM = 9 \cdot 3\sqrt{3} = 27\sqrt{3}.$$

Отрезок KL является средней линией треугольника ABC, поэтому $S_{KBL} = \frac{1}{4}S_{ABC}$. Аналогично $S_{MDN} = \frac{1}{4}S_{ADC}$. Тогда, имеем:

$$S_{KBL} + S_{MDN} = \frac{1}{4}S_{ABC} + \frac{1}{4}S_{ADC} = \frac{1}{4}(S_{ABC} + S_{ADC}) = \frac{1}{4}S.$$

Где S — искомая площадь четырёхугольника $ABCD$. Аналогично $S_{CML} + S_{AKN} = \frac{1}{4}S$. Поэтому

$$S_{KLMN} = S - \frac{1}{4}S - \frac{1}{4}S = \frac{1}{2}S.$$

Следовательно,

$$S = 2S_{KLMN} = 2 \cdot 27\sqrt{3} = 54\sqrt{3}.$$

Ответ: $54\sqrt{3}$.

Задание №17 решение и ответ:

Пусть на каждый тип вклада была внесена одинаковая сумма S. На вкладе «А» каждый год сумма увеличивается на 10%, то есть умножается на коэффициент 1,1. Поэтому через три года сумма на вкладе «А» будет равна

$$1,1^3S = 1,331S.$$

Аналогично сумма на вкладе «Б» будет равна

$$1,05\left(1+\frac{n}{100}\right)^2 S,$$

где n — некоторое натуральное число.

По условию требуется найти наименьшее натуральное решение неравенства

$$1,05\cdot(1+\frac{n}{100})^2S > 1,331S, \qquad \left(1+\frac{n}{100}\right)^2 > \frac{1331}{1050} = 1,26...$$

При $n = 13$ неравенство

$$1,13^2 > 1,26...; \quad 1,2769 > 1,26...$$

верно, а при $n = 12$ неравенство

$$1,12^2 > 1,26...; \quad 1,2544 > 1,26...$$

неверно, как и при всех меньших n.

Ответ: 13.

Задание №18 решение и ответ:

ОДЗ данного уравнения: $\sin t \neq \cos t \Leftrightarrow t \neq \frac{\pi}{4} + \pi n,\ n \in \mathbb{Z}$.

Задачу можно переформулировать так: найдите все значения k, при каждом из которых уравнение

$$6k - (2-3k)\cos t = 2(\sin t - \cos t)$$

имеет на отрезке $\left[0;\ \frac{\pi}{2}\right]$ хотя бы одно решение, не равное $\frac{\pi}{4}$.

Преобразуем уравнение:

$$6k-(2-3k)\cos t = 2(\sin t - \cos t) \Leftrightarrow 6k - 2\cos t + 3k\cos t = 2\sin t - 2\cos t \Leftrightarrow (\cos t + 2)3k = 2\sin t.$$

Функция в левой части уравнения на отрезке $\left[0;\ \frac{\pi}{2}\right]$ монотонно убывает от $9k$ до $6k$. Функция в правой части монотонно возрастает от 0 до 2. Таким образом, уравнение на отрезке $\left[0;\ \frac{\pi}{2}\right]$ будет иметь единственный корень в случае если $9k \geq 0$ и $6k \leq 2$, то есть при $k \in \left[0,\ \frac{1}{3}\right]$.

Осталось только выкинуть случай, когда единственный корень попадает в точку $x = \frac{\pi}{4}$. В этом случае получим:

$$\left(\cos\frac{\pi}{4}+2\right)3k = 2\sin\frac{\pi}{4} \Leftrightarrow \left(\frac{\sqrt{2}}{2}+2\right)3k = \sqrt{2} \Leftrightarrow k = \frac{2\sqrt{2}}{3(\sqrt{2}+4)} = \frac{2(2\sqrt{2}-1)}{21},$$

откуда получаем ответ.

Задание №19 решение и ответ:

а) Пусть на доске написано число 250 и 99 других различных натуральных чисел. Минимально возможная сумма чисел на доске достигается при условии, что сумма 99 различных натуральных чисел минимальна. А это, в свою очередь, возможно, если 99 различных натуральных числа - арифметическая прогрессия с первым членом $a_1 = 1$ и разностью $d = 1$. Сумма S_{99} этих чисел, по формуле суммы арифметической прогрессии, составит:

$$S_{99} = \frac{1+99}{2} \cdot 99 = 4950$$

Сумма всех чисел на доске S будет равна:

$$S = S_{99} + 250 = 4950 + 250 = 5200$$

Не трудно заметить, что полученная сумма больше, чем 5100, а это значит, что и любая сумма 100 различных натуральных чисел, среди которых есть 250, больше 5100, следовательно, числа 250 на доске быть не может.

б) Пусть на доске не записано число 11. В таком случае, минимально возможная сумма S чисел на доске будет состоять из двух сумм арифметических прогрессий: суммы S_1 первых 10 членов прогрессии с первым членом $a_1 = 1$, разностью $d = 1$ (то есть ряда 1,2,3,..10) и суммы первых 90 членов прогрессии с первым членом $a_1 = 12$, разностью $d = 1$ (то есть ряда 12,13,14,..101). Найдем эту сумму:

$$S = S_1 + S_2 = \frac{1+10}{2} \cdot 10 + \frac{12+101}{2} \cdot 90 = 55 + 5085 = 5140$$

Не трудно заметить, что полученная сумма больше, чем 5100, а это значит, что и любая сумма 100 различных натуральных чисел, среди которых нет 11, больше 5100, следовательно, без числа 11 на доске обойтись нельзя.

в) Допустим, что на доске выписаны все числа от 1 до 100. Тогда получается, что полученный ряд составляет арифметическую прогрессию с первым членом $a_1 = 1$, разностью $d = 1$. По формуле для суммы арифметической прогрессии найдем сумму S_0 всех чисел на доске

$$S_0 = \frac{1+100}{2} \cdot 100 = 5050.$$

Полученная сумма не удовлетворяет условию задачи. Теперь, чтобы увеличить сумму всех чисел, написанных на доске до обозначенной в условии, попробуем заменить числа, кратные 11 на другие числа, следующие за сотней: 77 заменим на 103, 88 на 102, а 99 на 101. Полученная сумма S будет равна:

$$S = S_0 - (77+88+99) + (103+102+101) = 5092.$$

Подправим сумму S: заменим число 101 на число 109, окончательно получим:

$$S = 5092 - 101 + 109 = 5100.$$

При дальнейшей замене чисел, кратных 11 на числа, большие 100, сумма будет увеличиваться и не соответствовать условию задачи. Таким образом, наименьшее количество чисел, кратных 11 равно 6.