Ответы для варианта 29527684

Задание №1 решение и ответ:

Разделим 500 на 30:

$$\frac{500}{30} = \frac{50}{3} = 16\frac{2}{3}.$$

Ване хватает денег на 16 тюльпанов, но цветов должно быть нечетное число. Следовательно, Ваня может купить букет из 15 тюльпанов.

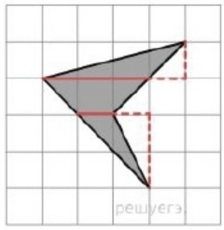
Ответ: 15.

Задание №2 решение и ответ:

Ответ: 7

Задание №3 решение и ответ:

Площадь четырёхугольника состоит из площадей двух треугольников и площади трапеции. Поэтому



$$S = \frac{1}{2}\cdot 3\cdot 1 + \frac{1}{2}\cdot(3+1)\cdot 1 + \frac{1}{2}\cdot 1\cdot 2 = 4{,}5\ \text{см}^2.$$

Задание №4 решение и ответ:

Всего в запасную аудиторию направили 250 − 120 − 120 = 10 человек. Поэтому вероятность того, что случайно выбранный участник писал олимпиаду в запасной аудитории, равна 10 : 250 = 0,04. Ответ: 0,04.

Задание №5 решение и ответ:

Перейдем к одному основанию степени:

$$8^{9-x} = 64^x \Leftrightarrow 8^{9-x} = 8^{2x} \Leftrightarrow 9 - x = 2x \Leftrightarrow x = 3.$$

Ответ: 3.

Задание №6 решение и ответ:

Углы A и HCB равны как углы со взаимно перпендикулярными сторонами.

$$AH = \frac{CH}{\operatorname{tg} A} = \frac{HB}{\operatorname{tg}^2 A} = \frac{12 \cdot 9}{4} = 27.$$

Ответ: 27.

Задание №7 решение и ответ:

Убыванию дифференцируемой функции $f(x)$ соответствуют отрицательные значения её производной. Производная отрицательна в точках x_1, x_2, x_3, x_4, x_8: точки лежат ниже оси абсцисс, их ординаты отрицательны. Таких точек 5.

Ответ: 5.

Задание №8 решение и ответ:

Найдем отношение объемов шаров:

$$\frac{V_1}{V_2} = \frac{R_1^3}{R_2^3} = 27,$$

откуда $\frac{R_1}{R_2} = 3$. Площади их поверхностей соотносятся как квадраты радиусов:

$$\frac{S_1}{S_2} = \frac{R_1^2}{R_2^2} = \left(\frac{R_1}{R_2}\right)^2 = 9.$$

Ответ: 9.

Задание №9 решение и ответ:

Разделим числитель и знаменатель на $\cos\alpha$:

$$\frac{7\sin\alpha + 13\cos\alpha}{5\sin\alpha - 17\cos\alpha} = \frac{7\operatorname{tg}\alpha + 13}{5\operatorname{tg}\alpha - 17} = 3.$$

Тогда

$$7\operatorname{tg}\alpha + 13 = 15\operatorname{tg}\alpha - 51 \Leftrightarrow 8\operatorname{tg}\alpha = 64 \Leftrightarrow \operatorname{tg}\alpha = 8.$$

Ответ: 8.

Задание №10 решение и ответ:

Водолазный колокол, содержащий $\nu = 2$ моля воздуха при давлении $p_1 = 1{,}5$ атмосферы, медленно опускают на дно водоёма. При этом происходит изотермическое сжатие воздуха до конечного давления p_2. Работа, совершаемая водой при сжатии воздуха, определяется выражением $A = \alpha\nu T\log_2\frac{p_2}{p_1}$, где $\alpha = 5{,}75$ — постоянная, $T = 300$ К — температура воздуха. Найдите, какое давление p_2 (в атм) будет иметь воздух в колоколе, если при сжатии воздуха была совершена работа в 6900 Дж.

Решение.

Задача сводится к решению уравнения $\alpha\nu T\log_2\frac{p_2}{p_1} = 6900$ при заданных значениях постоянной $\alpha = 5{,}75$, температуры воздуха $T = 300$ К, начального давления $p_1 = 1{,}5$ атм и количества воздуха $\nu = 2$ моль:

$$5{,}75\cdot 2\cdot 300\cdot\log_2\frac{p_2}{1{,}5} = 6900 \Leftrightarrow \log_2\frac{p_2}{1{,}5} = 2 \Leftrightarrow \frac{p_2}{1{,}5} = 4 \Leftrightarrow p_2 = 6 \text{ атм.}$$

Ответ: 6.

Задание №11 решение и ответ:

Пусть v км/ч – скорость первого автомобиля, тогда скорость второго автомобиля на первой половине пути равна $v - 13$ км/ч. Примем расстояние между пунктами за 2. Автомобили были в пути одно и то же время, отсюда имеем:

$$\frac{2}{v} = \frac{1}{78} + \frac{1}{v-13} \underset{v>48}{\Leftrightarrow} 2\cdot 78(v-13) = v^2 - 13v + 78v \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow v^2 - 91v + 52\cdot 39 = 0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} v = 52; \\ v = 39 \end{array}\right. \underset{v>48}{\Leftrightarrow} v = 52.$$

Таким образом, скорость первого автомобиля была равна 52 км/ч.

Ответ: 52.

Задание №12 решение и ответ:

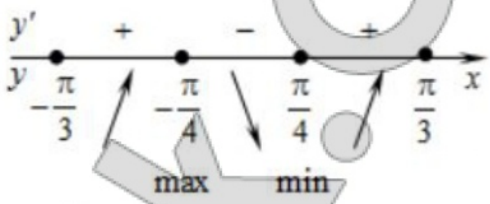
Найдем производную заданной функции:

$$y' = \frac{7}{\cos^2 x} - 14 = \frac{-7(2\cos^2 x - 1)}{\cos^2 x} = -\frac{7\cos 2x}{\cos^2 x}.$$

Найдем нули производной:

$$\begin{cases} 7\cos 2x = 0, \\ -\dfrac{\pi}{3} < x < \dfrac{\pi}{3} \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = \dfrac{\pi}{4} + \dfrac{\pi k}{2},\ k \in \mathbb{Z}, \\ -\dfrac{\pi}{3} < x < \dfrac{\pi}{3} \end{cases} \Leftrightarrow \left[\begin{aligned} x &= \frac{\pi}{4}, \\ x &= -\frac{\pi}{4}. \end{aligned}\right.$$

Определим знаки производной функции и изобразим на рисунке поведение функции:



Функция может принимать наименьшее значение в точках $x = -\frac{\pi}{3}$ или $x = \frac{\pi}{4}$. Найдем их:

$$y\left(-\frac{\pi}{3}\right) = -7\operatorname{tg}\frac{\pi}{3} + 14 \cdot \frac{\pi}{3} + \frac{7\pi}{2} + 11 = -7\sqrt{3} + \frac{49}{6}\pi + 11,$$
$$y\left(\frac{\pi}{4}\right) = 7\operatorname{tg}\frac{\pi}{4} - 3{,}5\pi + 3{,}5\pi + 11 = 18.$$

Поскольку $y(-\pi/3) > -14 + 24 + 11 = 21$, наименьшее из найденных чисел равно 18.

Ответ: 18.

Задание №13 решение и ответ:

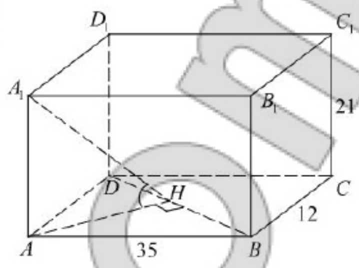
Уравнение является квадратным относительно корня:

$$\sqrt[5]{(3x+1)^6} - 5\sqrt[5]{(3x+1)^3} + 4 = 0 \Leftrightarrow \left[\begin{aligned} \sqrt[5]{(3x+1)^3} &= 1, \\ \sqrt[5]{(3x+1)^3} &= 4 \end{aligned}\right. \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \left[\begin{aligned} 3x+1 &= 1, \\ \sqrt[5]{3x+1} &= \sqrt[3]{4} \end{aligned}\right. \Leftrightarrow \left[\begin{aligned} x &= 0, \\ 3x+1 &= \sqrt[3]{4^5} \end{aligned}\right. \Leftrightarrow \left[\begin{aligned} x &= 0, \\ x &= \frac{\sqrt[3]{4^5} - 1}{3}. \end{aligned}\right.$$

Ответ: $\left\{0; \dfrac{\sqrt[3]{4^5} - 1}{3}\right\}$.

Задание №14 решение и ответ:



а) Проведем высоту AH в треугольнике ABD. Поскольку проекция прямой A_1H на плоскость $ABCD$ это прямая AH, то $A_1H \perp BD$ по теореме о трех перпендикулярах. Что и требовалось.

б) Из треугольника ABD находим

$$AH = \frac{2S_{ABD}}{BD} = \frac{12 \cdot 35}{\sqrt{35^2+12^2}} = \frac{420}{37}$$

$$\angle(ABC,\ A_1BD) = \angle(AH,\ A_1H) = \operatorname{arctg}\frac{A_1A}{AH} = \operatorname{arctg}\frac{37}{20}.$$

Ответ: б) $\operatorname{arctg}\frac{37}{20}$.

Задание №15 решение и ответ:

Разделим обе части неравенства на 5^x:

$$\frac{2^{x-1}}{\left(\log_2^2(x+1)^2\right)\log_3(x+2)} \le \frac{3^{x^2+x-2}}{\left(\log_2^2(x+1)^2\right)\log_3(x+2)} \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \frac{3^{(x-1)(x+2)} - 2^{(x-1)}}{\left(\log_2^2(x+1)^2\right)\log_3(x+2)} \ge 0 \Leftrightarrow \frac{3^{(x-1)(x+2)} - 3^{(x-1)\log_3 2}}{\left(\log_2^2(x+1)^2\right)\log_3(x+2)} \ge 0.$$

Решение будем искать при условиях

$$\begin{cases} x+1 \ne 0, \\ (x+1)^2 \ne 1, \\ x+2 > 0, \\ x+2 \ne 1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x \ne -1, \\ x \ne 0, \\ x > -2. \end{cases}$$

При этих условиях получаем неравенство:

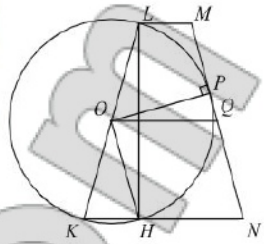
$$\frac{(x-1)(x+2)-(x-1)\log_3 2}{(x+2)-1} \ge 0 \Leftrightarrow \frac{(x-1)(x+2-\log_3 2)}{x+1} \ge 0.$$

Таким образом, множество решений исходного неравенства:

Ответ: $[\log_3 2 - 2;\ -1) \cup [1;\ +\infty)$.

Задание №16 решение и ответ:

а) Треугольник KOH равнобедренный и трапеция $KLMN$ равнобедренная, поэтому $\angle KHO = \angle OKH = \angle MNK$. Значит, прямые OH и MN параллельны, а так как OQ — средняя линия трапеции, то параллельны прямые OQ и KN. Противоположные стороны четырёхугольника $NQOH$ попарно параллельны, следовательно, $NQOH$ — параллелограмм.



б) Пусть окружность с центром в точке O радиуса R касается стороны MN в точке P. В прямоугольных треугольниках OPQ и KHL имеем

$$OQ = \frac{OP}{\sin OQP} = \frac{R}{\sin 75^\circ}, \quad KH = KL\cos\angle LKH = 2R\cos 75^\circ.$$

Поэтому

$$\frac{KH}{NH} = \frac{KH}{OQ} = \frac{2R\cos 75^\circ}{\dfrac{R}{\sin 75^\circ}} = 2\sin 75^\circ \cdot \cos 75^\circ = \sin 150^\circ = \frac{1}{2}.$$

Пусть $KH = x$. Поскольку трапеция $KLMN$ равнобедренная, $KN = 2KH + LM$, $NH = KH + LM = x + 1$. Тогда

$$\frac{KH}{NH} = \frac{x}{x+1} = \frac{1}{2},$$

откуда $x = 1$. Значит, $KN = 2x + 1 = 3$.

Ответ: б) 3.

Задание №17 решение и ответ:

Ясно, что наибольшим является первый платёж, соответствующий максимальной сумме долга. Пусть кредит планируется взять на n лет. Первый платёж при выплате дифференцируемыми платежами равен $\frac{9}{n} + 9 \cdot 0,2$ млн руб . По условию эта величина равна 3,6 млн руб., откуда $n = 5$. По формуле для выплаты В при оплате кредита S, взятого под r% годовых, имеем:

$$\text{В} = S + \frac{n+1}{200} rS,$$

Поэтому

$$\text{В} = 9 + \frac{5+1}{200} \cdot 20 \cdot 9 = 14,4 \text{ млн руб.}$$

Задание №18 решение и ответ:

Рассмотрим второе неравенство системы

$$(1+a)x > 8.$$

Если $a=-1$, то неравенство, а значит, и система не имеет решений.
Если $a>-1$, то решение неравенства — луч

$$x > \frac{8}{1+a}.$$

Если $a<-1$, то решение неравенства — луч

$$x < \frac{8}{1+a}.$$

При $a \neq -1$ первое неравенство системы принимает вид

$$\begin{cases}(1+a)\left(x+\dfrac{a}{1+a}\right)(x-2(1+a)) \geq 0, \\ x \neq 2(1+a).\end{cases}$$

Если $a>-1$, то решением первого неравенства исходной системы — будут два луча с концами в точках $-\frac{a}{1+a}$, $2(1+a)$. Очевидно, что при $a>-1$, решение системы будет содержать луч, вида $(b,+\infty)$, где b большее из чисел $\frac{8}{1+a}$, $-\frac{a}{1+a}$ и $2(1+a)$, а значит система будет иметь решение.

Если $a<-1$, то, в случае $-\frac{a}{1+a} = 2(1+a) \underset{a<-1}{\Leftrightarrow} a=-2$ первое неравенство исходной системы, а значит, и система не будет иметь решений. В остальных случаях решением первого неравенства исходной системы будет полуинтервал с концами в точках $-\frac{a}{1+a}, 2(1+a)$. Отметим, что точки $x=2(1+a)$ нет во множестве решений первого неравенства.

Для того, чтобы система в этом случае не имела решений необходимо и достаточно:

$$\begin{cases}a<-1, \\ a\neq -2, \\ -\dfrac{a}{1+a} \geq \dfrac{8}{1+a}, \\ 2(1+a) \geq \dfrac{8}{1+a}\end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases}a \neq -2, \\ -8 \leq a < -1, \\ (1+a)^2 \leq 4\end{cases} \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l}-3 \leq a < -2, \\ -2 < a < -1\end{array}\right..$$

Учитывая случаи $a=-1$, $a=-2$, получаем ответ.

Ответ: $-3 \leq a \leq -1$.

Задание №19 решение и ответ:

а) Приведем пример такой суммы: $\frac{33}{100} = \frac{1}{5} + \frac{1}{10} + \frac{1}{50} + \frac{1}{100}$.

б) Приведем пример такой суммы: $\frac{15}{91} = \frac{1}{7} + \frac{1}{91} + \frac{1}{182} + \frac{1}{273} + \frac{1}{546}$.

в) Пусть $m = dp$, $n = dq$, где d — наибольший общий делитель чисел m и n. Тогда $\frac{1}{dp} + \frac{1}{dq} = \frac{1}{14}$; $14(p+q) = dpq$. Числа p, q и $p + q$ попарно взаимно простые, поэтому числа p и q являются взаимно простыми делителями числа 14. Получаем следующие варианты:

p	q	d	m	n
1	1	28	28	28
1	2	21	21	42
1	7	16	16	112
1	14	15	15	210
2	7	9	18	63

Ответ:

а) Да, например, $\frac{33}{100} = \frac{1}{5} + \frac{1}{10} + \frac{1}{50} + \frac{1}{100}$;

б) Да, например, $\frac{15}{91} = \frac{1}{7} + \frac{1}{91} + \frac{1}{182} + \frac{1}{273} + \frac{1}{546}$;

в) 28 и 28, 21 и 42, 16 и 112, 15 и 210, 18 и 63.