В скобках указано, каким классам рекомендуется задача (решать задачи более старших классов также разрешается, решение задач более младших классов при подведении итогов не учитывается).

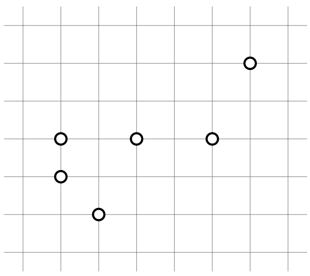
1. (6–7) Четыре мышонка: Белый, Серый, Толстый и Тонкий делили головку сыра. Они разрезали её на 4 внешне одинаковые дольки. В некоторых дольках оказалось больше дырок, поэтому долька Тонкого весила на 20 г меньше дольки Толстого, а долька Белого — на 8 г меньше дольки Серого. Однако Белый не расстроился, т. к. его долька весила ровно четверть от массы всего сыра.

Серый отрезал от своего куска 8 г, а Толстый — 20 г. Как мышата должны поделить образовавшиеся 28 г сыра, чтобы у всех сыра стало поровну? Не забудьте пояснить свой ответ.

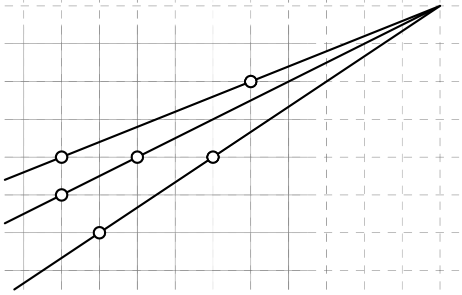
Ответ. Толстый и Тонкий должны взять себе по 14 г сыра.

Решение. Заметим, что теперь долька Серого весит столько же, что и долька Белого, т.е. ровно четверть от массы всего сыра. Значит, и Белый, и Серый уже получили свою долю, и все 28 граммов должны быть поделены Толстым и Тонким. Сейчас у них поровну сыра, значит, и получить они должны поровну, т.е. по 14 г.

2. (6–8) На клетчатой бумаге отмечены 6 точек (см. рисунок). Проведите три прямые так, чтобы одновременно выполнялись три условия:
— каждая отмеченная точка лежала хотя бы на одной из этих прямых,
— на каждой прямой лежало хотя бы две отмеченные точки,
— все три проведённые прямые пересекались бы в одной точке (не обязательно отмеченной).



Решение. См. рис. (решение единственно).



Замечание. Чтобы убедиться, что все три прямые действительно проходят через указанную точку, удобно посмотреть на *наклон* каждой из прямых: например, нижняя из прямых поднимается на 2 клетки, когда мы сдвигаемся вправо на 3 клетки.

3. (6–8) У Ильи есть табличка 3×3, заполненная числами от 1 до 9 так, как в таблице слева. За один ход Илья может поменять местами любые две строчки или любые два столбца. Может ли он за несколько ходов получить таблицу справа?

1	2	3
4	5	6
7	8	9

1	4	7
2	5	8
3	6	9

Ответ. Нет, не может.

Решение. Заметим, что как при перемене двух строк местами, так и при перемене двух столбцов местами, числа 1 и 2 остаются в одной строке. Во второй таблице это не так, поэтому получить её Илье не удастся.

Замечание. Можно заметить, что при описанных действиях *наборы чисел в строках и столбцах* не меняются, т. е. в какой-то строке всегда в некотором порядке будут числа 1, 2, 3, в другой — 4, 5, 6, в третьей — 7, 8, 9. Величина (обычно, числовая, но бывает и иначе), которая не меняется в ходе некоторого процесса, называется *инвариантом*. Про инварианты можно почитать, например, в статье Ю. Ионин, Л. Курляндчик «Поиск инварианта» (журнал Квант, 1976 г., №2; `http://kvant.mccme.ru/1976/02/poisk_invarianta.htm`).

4. (8–9) Пусть a, b, c, d и n — натуральные числа. Докажите, что если числа $(a-b)(c-d)$ и $(a-c)(b-d)$ делятся на n, то и число $(a-d)(b-c)$ делится на n.

Первое решение. Раскроем скобки в каждом из выражений:

$$(a-b)(c-d) = ac - ad - bc + bd;$$
$$(a-c)(b-d) = ab - ad - bc + cd;$$
$$(a-d)(b-c) = ab - ac - bd + cd.$$

Теперь несложно заметить, что

$$(a-d)(b-c) = (a-c)(b-d) - (a-b)(c-d),$$

откуда сразу следует утверждение задачи: разность двух чисел, делящихся на n, делится на n.

Второе решение. Заметим, что если из каждого из чисел a, b, c, d вычесть одно и то же число, то значения их попарных разностей не изменятся.

Поэтому вычитая, если нужно, из всех чисел d, *можно считать*, что $d = 0$. Таким образом, достаточно доказать, что если $(a-b)c$ и $(a-c)b$ делятся на n, то на n делится и $a(b-c)$.

Это можно сделать так же, как и в первом решении, но мы воспользуемся сравнениями по модулю: первое условие говорит нам, что $ac \equiv bc \pmod n$, второе — что $ab \equiv bc \pmod n$, откуда $ab \equiv bc \equiv ac \pmod n$, т. е. $ab \equiv ac \pmod n$, что и требовалось доказать.

5. (9–11) В школе провели турнир по настольному теннису. Турнир состоял из нескольких туров. В каждом туре каждый участник играл ровно в одном матче, а каждый матч судил один из не участвовавших в нем игроков.

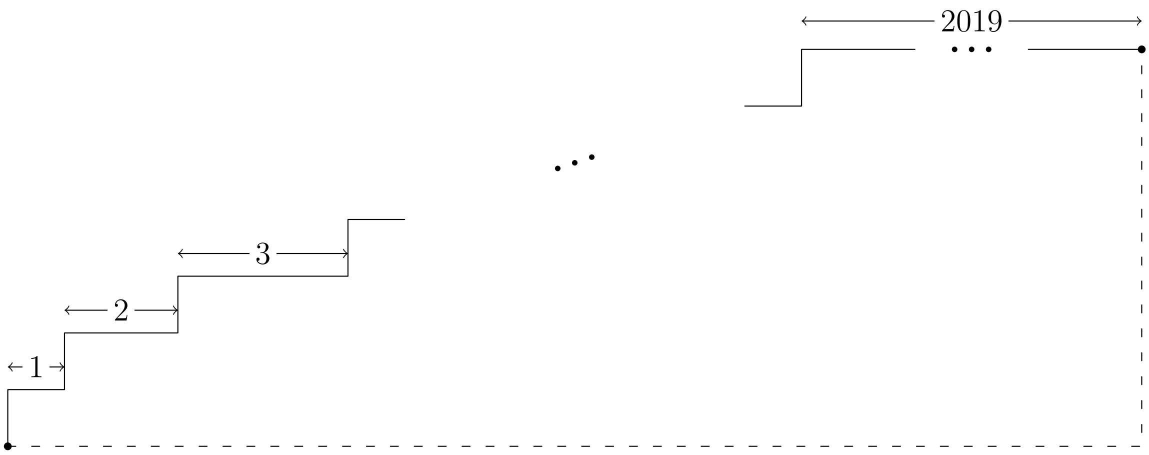
После нескольких туров оказалось, что каждый участник сыграл по одному разу с каждым из остальных. Может ли оказаться, что все участники турнира судили одинаковое количество встреч?

Ответ. Нет, не могло.

Решение. Пусть в одном туре было сыграно k партий. Так как каждый участник играл в одной партии, всего участников было $2k$. Тогда всего в турнире было $2k(2k-1)/2$ партий[1].

Но если все участники судили одинаковое количество встреч, то каждый из них должен был судить по $\frac{2k(2k-1)/2}{2k} = (2k-1)/2$ встречи, а это число нецелое.

6. (9–11) Высота каждой из 2019 ступенек «лестницы» (см. рисунок) равна 1, а ширина — увеличивается от 1 до 2019. Правда ли, что отрезок, соединяющий левую нижнюю и правую верхнюю точки этой лестницы, не пересекает лестницу?



Ответ. Да, не пересекает.

Решение. Пусть A_i $(i = 1, 2, \dots)$ — основание i-й ступеньки (в частности, A_1 — левая нижняя точка лестницы), A_{2020} — верхняя правая точка лестницы. Наклон (тангенс угла с горизонтальным направлением вправо) отрезка A_iA_{i+1} равен $1/i$ и, значит, убывает с ростом i.

Ясно, что отрезок A_1A_2 не пересекает лестницу. Докажем, что если отрезок A_1A_n не пересекает лестницу, то и следующий отрезок, A_1A_{n+1}, ее не пересекает. Действительно, точка A_{n-1} лежит не ниже отрезка A_1A_n, поэтому наклон отрезка $A_{n-1}A_n$ не больше, чем у A_1A_n. А так как у A_nA_{n+1} наклон меньше (как отмечено выше), точка A_{n+1} лежит ниже прямой A_1A_n. Поскольку отрезок A_1A_n не пересекает лестницу, её не пересекает и отрезок A_1A_{n+1}.

[1] Представим себе турнирную таблицу. Каждой партии соответствует клетка над диагональю. Этих клеток столько же, сколько и под диагональю, а клеток под и над диагональю суммарно $(2k)^2 - 2k = 2k(2k-1)$.

Таким образом, лестницу не пересекает ни один из отрезков A_1A_N, в частности, A_1A_{2000}.

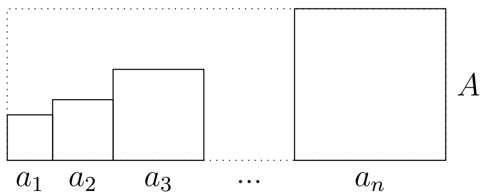
7. (10–11) Сумма нескольких положительных чисел равна единице. Докажите, что среди них найдётся число, не меньшее суммы квадратов всех чисел.

Решение. Пусть исходные числа равняются $a_1, a_2, \ldots, a_n$. Докажем, что наибольшее из них, A, подходит[2]. Для каждого k выполняется неравенство $a_k^2 \leqslant a_kA$. Складывая все такие неравенства, получаем

$$a_1^2 + a_2^2 + \ldots + a_n^2 \leqslant a_1A + a_2A + \ldots + a_nA = (a_1 + a_2 + \ldots + a_n)A = A,$$

где последнее равенство следует из того, что сумма всех чисел равна 1.

На рисунке ниже — геометрическое объяснение того же неравенства: квадраты со сторонами a_i расположены внутри прямоугольника $A \times 1$ (а значит, сумма площадей первых не превосходит площади последнего).



Задания и решения подготовили: А. В. Антропов, А. Д. Блинков, И. Р. Высоцкий, Т. В. Казицына, Т. А. Корчемкина, Н. Ю. Медведь, Г. А. Мерзон, М. А. Раскин, И. В. Раскина, Б. Р. Френкин, Д. Э. Шноль.

Задания, решения, результаты появляются на сайте turlom.olimpiada.ru

[2] Это достаточно естественный выбор: ведь если бы даже наибольшее число было меньше суммы квадратов всех чисел, то и все числа были бы меньше.