Критерии

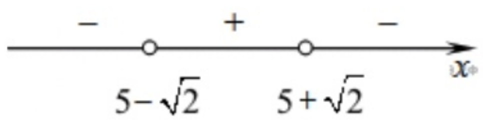
Вариант 14

21. Решите неравенство $\frac{-14}{(x-5)^2-2} \geq 0.$

Решение.

Решим неравенство методом интервалов, для этого, сначала, найдём корни уравнения $(x-5)^2-2=0$:

$$(x-5)^2-2=0 \Leftrightarrow x^2-10x+25-2=0 \Leftrightarrow x^2-10x+23=0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x=5-\sqrt{2}, \\ x=5+\sqrt{2}. \end{array}\right.$$



Теперь расставим точки на прямой и определим знаки *исходного* выражения на каждом получившемся промежутке(см рис.).

Таким образом, ответ $(5-\sqrt{2};\ 5+\sqrt{2})$.

Ответ: $(5-\sqrt{2};\ 5+\sqrt{2})$.

Критерии проверки:

Критерии оценивания выполнения задания	**Баллы**
Правильно составлено уравнение, получен верный ответ	3
Правильно составлено уравнение, но при его решении допущена вычислительная ошибка, с её учётом решение доведено до ответа	2
Другие случаи, не соответствующие указанным критериям	0
Максимальный балл	3

22. Рыболов проплыл на лодке от пристани некоторое расстояние вверх по течению реки, затем бросил якорь, 2 часа ловил рыбу и вернулся обратно через 5 часов от начала путешествия. На какое расстояние от пристани он отплыл, если скорость течения реки равна 2 км/ч, а собственная скорость лодки 5 км/ч?

Решение.

Пусть S км — расстояние, на которое от пристани отплыл рыболов. Зная, что скорость течения реки — 2 км/ч, а скорость лодки — 5 км/ч, найдём, что время, за которое он проплыл туда и обратно, составляет $\frac{S}{5-2}+\frac{S}{5+2}$ ч. Учитывая, что он был на стоянке 2 часа и вернулся через 5 часов после отплытия можно составить уравнение:

$$\frac{S}{3}+\frac{S}{7}+2=5.$$

Отсюда S = 6,3 км.

Ответ: 6,3 км.

Критерии проверки:

Критерии оценивания выполнения задания	Баллы
Правильно составлено уравнение, получен верный ответ	2
Правильно составлено уравнение, но при его решении допущена вычислительная ошибка, с её учётом решение доведено до ответа	1
Другие случаи, не соответствующие указанным критериям	0
Максимальный балл	2

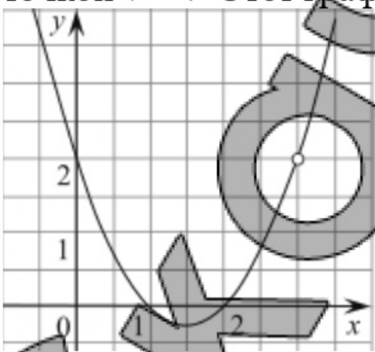
23. Постройте график функции $y=\frac{(x-1)(x^2-5x+6)}{x-3}$ и определите, при каких значениях m прямая $y=m$ имеет с графиком ровно одну общую точку.

Решение.

Упростим выражение:

$$y=\frac{(x-1)(x^2-5x+6)}{x-3}=(x-1)(x-2)=x^2-3x+2$$

График исходной функции сводится к графику параболы $y=x^2-3x+2$ с выколотой точкой $(3;2)$. Этот график изображён на рисунке:



Из графика видно, что прямая $y=m$ имеет с графиком одну общую точку, если $y=2$ или $y=-0,25$

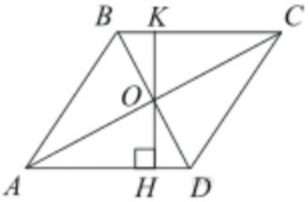
Ответ: -0,25; 2

Критерии оценивания выполнения задания	Баллы
Получен верный обоснованный ответ	2
При верных рассуждениях допущена вычислительная ошибка, возможно приведшая к неверному ответу	1
Другие случаи, не соответствующие указанным критериям	0

Максимальный балл	2

24. Расстояние от точки пересечения диагоналей ромба до одной из его сторон равно 12, а одна из диагоналей ромба равна 48. Найдите углы ромба.

Решение.



Пусть диагонали ромба $ABCD$ пересекаются в точке O, отрезок OH — высота треугольника AOD, причем $AC = 48$, $OH = 12$. Тогда в прямоугольном треугольнике AOH гипотенуза AO вдвое больше катета OH, значит, угол OAH равен 30°.

Диагонали ромба делят его углы пополам, значит, $\angle BAD = \angle BCD = 60°$, а $\angle ABC = \angle ADC = 120°$.

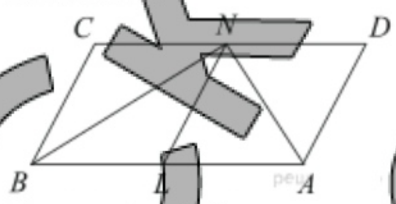
Ответ: 60°; 120°; 60°; 120°.

Критерии проверки:

Критерии оценивания выполнения задания	Баллы
Ход решений верный, все его шаги выполнены правильно, получен верный ответ	2
Ход решений верный, все его шаги выполнены правильно, но даны неполные объяснения или допущена одна вычислительная ошибка	1
Решение не соответствует ни одному из критериев, перечисленных выше	0
Максимальный балл	2

25. Сторона CD параллелограмма $ABCD$ вдвое больше стороны BC. Точка N — середина стороны CD. Докажите, что BN — биссектриса угла ABC.

Решение.



Проведём LN параллельно AD (см. рис.). Тогда $LB = BC = CN$. Следовательно, параллелограмм $BCNL$ является ромбом. Диагональ BN ромба $BCNL$ является биссектрисой угла ABC.

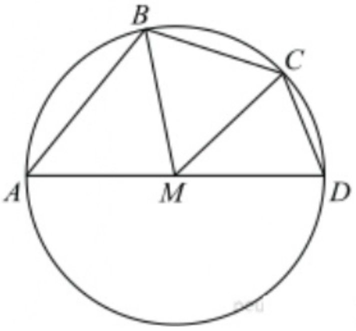
Критерии проверки:

Критерии оценивания выполнения задания	Баллы
Доказательство верное, все шаги обоснованы.	2
Доказательство в целом верное, но содержит неточности.	1

Другие случаи, не соответствующие указанным критериям.	0
Максимальный балл	2

26. Середина M стороны AD выпуклого четырёхугольника равноудалена от всех его вершин. Найдите AD, если $BC = 9$, а углы B и C четырёхугольника равны соответственно 116° и 94°.

Решение.



Поскольку существует точка, равноудалённая от всех вершин четырёхугольника, четырёхугольник можно вписать в окружность. Четырёхугольник вписан в окружность, следовательно, суммы противоположных углов равны 180°:

$$\angle BAD + \angle BCD = 180^\circ \Leftrightarrow \angle BAD = 86^\circ.$$

Отрезки AM, BM и CM равны как радиусы окружности, поэтому треугольники ABM и BMC — равнобедренные, откуда $\angle BAD = \angle ABM = 86^\circ$ и $\angle MCB = \angle MBC = \angle ABC - \angle ABM = 30^\circ$. Рассмотрим треугольник BMC, сумма углов в треугольнике равна 180°, откуда $\angle BMC = 180^\circ - \angle MBC - \angle BCM = 120^\circ$. По теореме синусов найдём сторону BM из треугольника BMC:

$$\frac{BC}{\sin BMC} = \frac{BM}{\sin BCM} \Leftrightarrow BM = \frac{9 \cdot \frac{1}{2}}{\frac{\sqrt{3}}{2}} \Leftrightarrow BM = 3\sqrt{3}.$$

Сторона AD — диаметр описанной окружности, поэтому $AD = 2BM = 6\sqrt{3}.$

Ответ: $6\sqrt{3}$.

Критерии проверки:

Критерии оценивания выполнения задания	**Баллы**
Ход решения верный, все его шаги выполнены правильно, получен верный ответ	2
Ход решения верный, чертёж соответствует условию задачи, но пропущены существенные объяснения или допущена вычислительная ошибка	1
Другие случаи, не соответствующие указанным критериям	0

Максимальный балл	2

Вариант 15

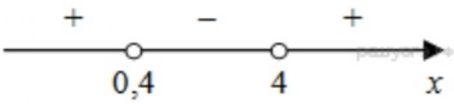
21. Решите неравенство $\frac{x^2}{2} > \frac{11x-4}{5}.$

Решение.

Умножим на 10 и решим неравенство:

$$\frac{x^2}{2} > \frac{11x-4}{5} \Leftrightarrow 5x^2 - 22x + 8 > 0 \Leftrightarrow 5(x-0,4)(x-4) > 0.$$

Произведение двух сомножителей будет больше нуля, если сомножители имеют одинаковый знак.



Таким образом, получится:

$$\left[\begin{array}{l} x < 0,4, \\ x > 4. \end{array}\right.$$

Ответ: $(-\infty;\ 0,4) \cup (4;\ +\infty)$.

Критерии проверки:

Критерии оценивания выполнения задания	Баллы
Правильно выполнены преобразования, получен верный ответ	2
Решение доведено до конца, но допущена ошибка или описка вычислительного характера, с её учётом дальнейшие шаги выполнены верно	1
Другие случаи, не соответствующие указанным выше критериям	0
Максимальный балл	2

22. Туристы проплыли на лодке от лагеря некоторое расстояние вверх по течению реки, затем причалили к берегу и, погуляв 3 часа, вернулись обратно через 5 часов от начала путешествия. На какое расстояние от лагеря они отплыли, если скорость течения реки равна 3 км/ч, а собственная скорость лодки 6 км/ч?

Решение.

Пусть S км — расстояние, на которое от лагеря отплыли туристы. Зная, что скорость течения реки — 3 км/ч, а скорость лодки — 6 км/ч, найдём, что время, за которое они проплыли туда и обратно, составляет $\frac{S}{6-3} + \frac{S}{6+3}$ ч. Учитывая, что они были на стоянке 3 часа и вернулись через 5 часов после отплытия можно составить уравнение:

$$\frac{S}{3}+\frac{S}{9}+3=5.$$

Отсюда S = 4,5 км.

Ответ: 4,5 км.

Критерии проверки:

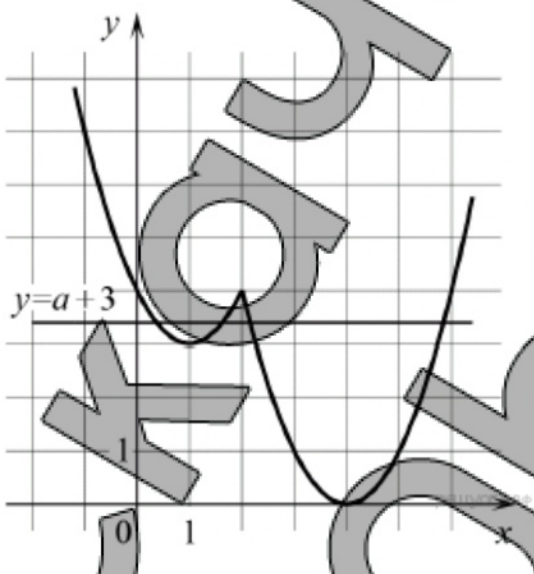
Критерии оценивания выполнения задания	**Баллы**
Правильно составлено уравнение, получен верный ответ	2
Правильно составлено уравнение, но при его решении допущена вычислительная ошибка, с её учётом решение доведено до ответа	1
Другие случаи, не соответствующие указанным критериям	0
Максимальный балл	2

23. Постройте график функции $y=x^2-5x+10-3|x-2|$ и найдите все значения a, при которых он имеет ровно три общие точки с прямой $y=a+3$.

Решение.

Построим график функции

$$y=\begin{cases}x^2-2x+4, x<2,\\ x^2-8x+16, x\geq 2.\end{cases}$$



Прямая $y=a+3$ имеет с построенным графиком ровно три общие точки при $a=0$ и $a=1$.

Ответ:0; 1.

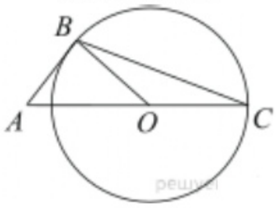
Критерии проверки:

Критерии оценивания выполнения задания	Баллы

График построен верно, верно найдены искомые значения параметра	2
График построен верно, но искомые значения параметра найдены неверно или не найдены	1
Другие случаи, не соответствующие указанным критериям	0
Максимальный балл	2

24. Окружность с центром на стороне AC треугольника ABC проходит через вершину C и касается прямой AB в точке B. Найдите диаметр окружности, если $AB = 4$, $AC = 16$.

Решение.



Проведём радиус OB. Пусть R — длина радиуса окружности. Заметим, что $AO = AC - OC = AC - R$. Поскольку OB — радиус, проведённый в точку касания $OB \perp AB$. Рассмотрим прямоугольный треугольник AOB, по теорем Пифагора:

$$AO^2 = AB^2 + OB^2 \Leftrightarrow AC^2 - 2AC \cdot R + R^2 = AB^2 + R^2 \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow R = \frac{AC^2 - AB^2}{2AC} \Leftrightarrow R = \frac{256 - 16}{2 \cdot 16} \Leftrightarrow R = 7,5.$$

Таким образом, диаметр окружности равен 15.

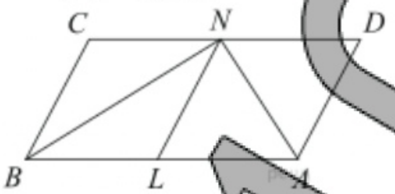
Ответ: 15.

Критерии проверки:

Критерии оценивания выполнения задания	Баллы
Получен верный обоснованный ответ	2
При верных рассуждениях допущена вычислительная ошибка, возможно приведшая к неверному ответу	1
Другие случаи, не соответствующие указанным критериям	0
Максимальный балл	2

25. Сторона CD параллелограмма $ABCD$ вдвое больше стороны BC. Точка N — середина стороны CD. Докажите, что BN — биссектриса угла ABC.

Решение.



Проведём LN параллельно AD (см. рис.). Тогда $LB = BC = CN$. Следовательно, параллелограмм $BCNL$ является ромбом. Диагональ BN ромба $BCNL$ является биссектрисой угла ABC.

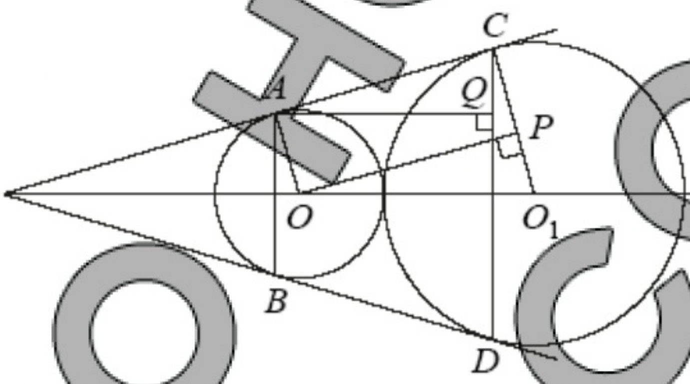
Критерии проверки:

Критерии оценивания выполнения задания	Баллы
Доказательство верное, все шаги обоснованы.	2
Доказательство в целом верное, но содержит неточности.	1
Другие случаи, не соответствующие указанным критериям.	0
Максимальный балл	2

26.

Окружности радиусов 36 и 45 касаются внешним образом. Точки A и B лежат на первой окружности, точки C и D — на второй. При этом AC и BD — общие касательные окружностей. Найдите расстояние между прямыми AB и CD.

Решение.



Пусть O и O_1 — центры первой и второй окружностей соответственно (см. рисунок). Линия центров касающихся окружностей проходит через их точку касания, поэтому расстояние между центрами окружностей равно сумме их радиусов, то есть 81.

Опустим перпендикуляр OP из центра меньшей окружности на радиус O_1C второй окружности. Тогда $O_1P = O_1C - PC = O_1C - OA = 45 - 36 = 9$.

Из прямоугольного треугольника OPO_1 находим, что $OP^2 = 6480$, а так как четырёхугольник $AOPC$ — прямоугольник, $AC = OP$.

Опустим перпендикуляр AQ из точки A на прямую CD, тогда

$$\angle O_1OP = 90^\circ - \angle OO_1P = \angle O_1CD = 90^\circ - \angle ACQ = \angle CAQ.$$

Прямоугольные треугольники AQC и OPO_1 подобны по острому углу, поэтому $\frac{AQ}{AC} = \frac{OP}{OO_1}$. Следовательно, $AQ = \frac{OP \cdot AC}{OO_1} = \frac{OP^2}{OO_1} = 80$.

Ответ: 80.

Баллы	Содержание критерия
2	Ход решения задачи верный, получен верный ответ
1	Ход решения верный, все его шаги присутствуют, но допущена ошибка вычислительного характера
0	Решение не соответствует ни одному из критериев, перечисленных выше
2	*Максимальный балл*

Вариант 16

21. Решите неравенство $(3x-7)^2 \geq (7x-3)^2$.

Решение.

Последовательно получаем:

$$(3x-7)^2 \geq (7x-3)^2 \Leftrightarrow (3x-7)^2-(7x-3)^2 \geq 0 \Leftrightarrow (3x-7-(7x-3))(3x-7+(7x-3)) \geq 0 \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow (-4x-4)(10x-10) \geq 0 \Leftrightarrow -4\cdot 10(x+1)(x-1) \geq 0 \Leftrightarrow (x+1)(x-1) \leq 0.$$

Произведение двух множителей меньше нуля тогда и только тогда, когда знаки множителей различны, следовательно:

$$(x+1)(x-1) \leq 0 \Leftrightarrow -1 \leq x \leq 1.$$

Ответ: [-1; 1].

Критерии проверки:

Критерии оценивания выполнения задания	Баллы
Преобразования выполнены верно, получен верный ответ.	2
Решение доведено до конца, но допущена ошибка или описка вычислительного характера, с её учётом дальнейшие шаги выполнены верно.	1
Другие случаи, не соответствующие указанным критериям.	0
Максимальный балл	2

22. Первый велосипедист выехал из посёлка по шоссе со скоростью 18 км/ч. Через час после него со скоростью 16 км/ч из того же посёлка в том же направлении выехал второй велосипедист, а ещё через час — третий. Найдите скорость третьего велосипедиста, если сначала он догнал второго, а через 4 часа после этого догнал первого.

Решение.

Пусть скорость третьего велосипедиста равна v км/ч, а t ч— момент времени, когда он догнал второго велосипедиста. Начало отсчёта времени — момент, когда первый велосипедист начал движение. Тогда к моменту времени t, когда третий велосипедист догонит второго, второй велосипедист проедет расстояние $16(t-1)$ км, а третий — расстояние $v(t-2)$ км. Аналогично: к моменту времени $t+4$, когда третий велосипедист догонит первого, первый велосипедист проедет $18(t+4)$ км, а третий, поскольку он был в пути на два часа меньше, проедет $v(t+2)$ км. Составим систему уравнений:

$$\begin{cases} 16(t-1) = v(t-2), \\ 18(t+4) = v(t+2). \end{cases}$$

Умножим первое уравнение на $t+2$, а второе — на $t-2$ и вычтем первое уравнение из второго:

$$18(t^2+2t-8)-16(t^2+t-2)=0 \Leftrightarrow 2t^2+20t-112=0 \Leftrightarrow t^2+10t-56=0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} t=-14, \\ t=4. \end{array}\right.$$

По условию задачи подходит только положительный корень, то есть $t=4$. Подставляя t во второе уравнение, найдём искомую скорость:

$$18 \cdot 8 = v \cdot 6 \Leftrightarrow v = 24.$$

Ответ: 24 км/ч.

Критерии проверки:

Критерии оценивания выполнения задания	Баллы
Правильно составлено уравнение, получен верный ответ	2
Правильно составлено уравнение, но при его решении допущена вычислительная ошибка, с её учётом решение доведено до ответа	1
Другие случаи, не соответствующие указанным критериям	0
Максимальный балл	2

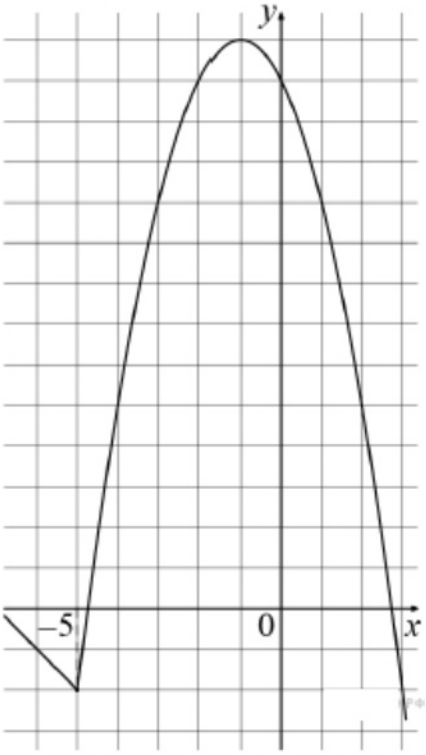
23. Постройте график функции

$$y=\begin{cases} -x^2-2x+13, \text{ если } x \geq -5, \\ -x-7, \text{ если } x < -5, \end{cases}$$

и определите, при каких значениях m прямая $y=m$ имеет с графиком ровно две общие точки.

Решение.

Построим график функции $y=-x-7$ при $x<-5$ и график функции $y=-x^2-2x+13$ при $x \geq -5$.



Прямая $y = m$ имеет с графиком ровно две общие точки при $m = -2$ и $m = 14$.

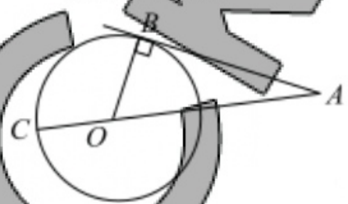
Ответ: -2; 14.

Критерии проверки:

Критерии оценивания выполнения задания	Баллы
График построен верно, верно найдены искомые значения параметра.	2
График построен верно, но искомые значения параметра найдены неверно или не найдены.	1
Другие случаи, не соответствующие указанным критериям.	0
Максимальный балл	2

24. Окружность с центром на стороне AC треугольника ABC проходит через вершину C и касается прямой AB в точке B. Найдите AC, если диаметр окружности равен 8, а $AB = 3$.

Решение.



Пусть O — центр окружности. Радиус окружности, проведённый в точку касания, перпендикулярен касательной. Поэтому треугольник OBA — прямоугольный. Найдём OA по теореме Пифагора:

$$OA = \sqrt{AB^2 + OB^2} = \sqrt{9+16} = 5.$$

Следовательно, длина стороны AC равна $AC = CO + OA = 4 + 5 = 9$.

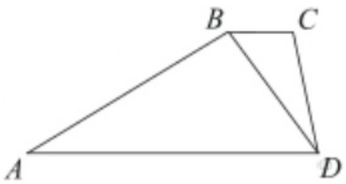
Ответ: 9.

Критерии проверки:

Критерии оценивания выполнения задания	Баллы
Получен верный обоснованный ответ	2
При верных рассуждениях допущена вычислительная ошибка, возможно приведшая к неверному ответу	1
Другие случаи, не соответствующие указанным критериям	0
Максимальный балл	2

25. Основания BC и AD трапеции $ABCD$ равны соответственно 2 и 32, $BD = 8$. Докажите, что треугольники CBD и BDA подобны.

Решение.



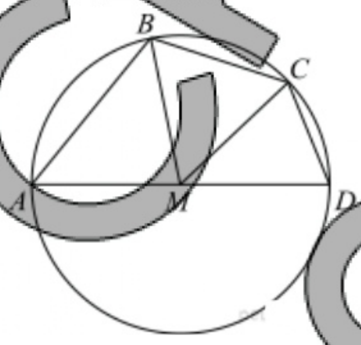
Углы CBD и BDA равны, как накрест лежащие при параллельных прямых. В треугольниках CBD и ADB : $\frac{BC}{BD} = \frac{BD}{AD}$, следовательно, эти треугольники подобны по двум парам пропорциональных сторон и углу между ними.

Критерии проверки:

Критерии оценивания выполнения задания	Баллы
Доказательство верное, все шаги обоснованы.	2
Доказательство в целом верное, но содержит неточности.	1
Другие случаи, не соответствующие указанным критериям.	0
Максимальный балл	2

26. Середина M стороны AD выпуклого четырёхугольника равноудалена от всех его вершин. Найдите AD, если $BC = 6$, а углы B и C четырёхугольника равны соответственно 124° и 116°.

Решение.



Поскольку существует точка, равноудалённая от всех вершин четырёхугольника, четырёхугольник можно вписать в окружность. Четырёхугольник вписан в окружность, следовательно, суммы противоположных углов равны 180°:

$$\angle BAD + \angle BCD = 180^\circ \Leftrightarrow \angle BAD = 64^\circ.$$

Отрезки AM, BM и CM равны как радиусы окружности, поэтому треугольники ABM и BMC — равнобедренные, откуда $\angle BAD = \angle ABM = 64^\circ$ и $\angle MCB = \angle MBC = \angle ABC - \angle ABM = 60^\circ$. Рассмотрим треугольник BMC, сумма углов в треугольнике равна 180°, откуда $\angle BMC = 180^\circ - \angle MBC - \angle BCM = 60^\circ$. По теореме синусов найдём сторону BM из треугольника BMC:

$$\frac{BC}{\sin BMC} = \frac{BM}{\sin BCM} \Leftrightarrow BM = BC = 6.$$

Сторона AD — диаметр описанной окружности, поэтому $AD = 2BM = 12.$

Ответ: $12.$

Критерии проверки:

Критерии оценивания выполнения задания	**Баллы**
Ход решения верный, все его шаги выполнены правильно, получен верный ответ	2
Ход решения верный, чертёж соответствует условию задачи, но пропущены существенные объяснения или допущена вычислительная ошибка	1
Другие случаи, не соответствующие указанным критериям	0
Максимальный балл	