

## Вариант 2.

### Ответы

<b>1</b>	<b>2</b>	<b>3</b>	<b>4</b>	<b>5</b>	<b>6</b>	<b>7</b>	<b>8</b>	<b>9</b>	<b>10</b>	<b>11</b>	<b>12</b>
3	3	12	0,028	0,125	4	-4	45	2	2	213000	-2

### Решения заданий 13-19

**Задание 13.** а) Решите уравнение  $2^{2+2\sin x} - 3 \cdot (\sqrt{2})^{1+2\sin x} + 1 = 0$ .

б) Найдите корни этого уравнения, принадлежащие отрезку  $\left[4\pi; \frac{23\pi}{4}\right]$ .

**Решение.**

а) Решим уравнение  $2^{2+2\sin x} - 3 \cdot (\sqrt{2})^{1+2\sin x} + 1 = 0$

Сделаем замену, пусть  $t = \sqrt{2}^{1+2\sin x}$ , тогда

$$2t^2 - 3t + 1 = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} t = \frac{1}{2}, \\ t = 1 \end{cases}$$

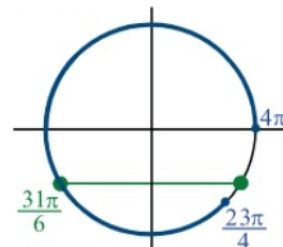
Вернёмся к исходной переменной

$$\begin{cases} \sqrt{2}^{1+2\sin x} = \frac{1}{2}, \\ \sqrt{2}^{1+2\sin x} = 1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 1+2\sin x = -2, \\ 1+2\sin x = 0, \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \sin x = -\frac{3}{2}, \\ \sin x = -\frac{1}{2} \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = -\frac{\pi}{6} + 2\pi n, \\ x = -\frac{5\pi}{6} + 2\pi n, \end{cases} \quad n \in \mathbb{Z}$$

б) Отберём корни, принадлежащие отрезку  $\left[4\pi; \frac{23\pi}{4}\right]$  с помощью тригонометрической окружности.

Получим  $\frac{31\pi}{6}$ .

Ответ: а)  $-\frac{\pi}{6} + 2\pi n, -\frac{5\pi}{6} + 2\pi n, n \in \mathbb{Z}$ ; б)  $\frac{31\pi}{6}$ .



Содержание критерия	Баллы
Обоснованно получен правильный ответ	2
Обоснованно получен верный ответ в пункте а ИЛИ получены неверные ответы из-за вычислительной ошибки, но при этом имеется верная последовательность всех шагов решения обоих пунктов: пункта а и пункта б	1
Решение не соответствует ни одному из критериев, приведённых выше	0
<b>Максимальный балл</b>	<b>2</b>

**Задание 14.** Длина ребра куба  $ABCD A_1 B_1 C_1 D_1$  равна 1.

а) Докажите, что точки  $B$  и  $C_1$  равноудалены от плоскости  $ACD_1$ .

б) Найдите расстояние от вершины  $B$  до плоскости  $ACD_1$ .

**Решение.**

а) Прямые  $CD_1$  и  $BA_1$  параллельны. Аналогично  $BC_1 \parallel AD_1$ . Значит, по признаку параллельности плоскостей,  $ACD_1 \parallel BC_1A_1$ . Поэтому точки  $B$  и  $C_1$  равноудалены от плоскости  $ACD_1$ .

б) Плоскость  $ACD_1$  проходит через точку пересечения диагоналей квадрата  $ABCD$ . Опустим перпендикуляр  $OO_1$  на плоскость  $A_1B_1C_1D_1$ . Точка  $O_1$  является точкой пересечения диагоналей квадрата  $A_1B_1C_1D_1$ . Диагонали квадрата в  $\sqrt{2}$  раз больше стороны квадрата и делятся точкой пересечения пополам. Поэтому  $OB = O_1D_1 = \frac{\sqrt{2}}{2}$ . Отрезок  $OO_1$  равен стороне квадрата. Из прямоугольного треугольника  $OO_1D_1$  по теореме Пифагора найдём  $OD_1$ :

$$OD_1 = \sqrt{OO_1^2 + O_1D_1^2} = \sqrt{1^2 + \left(\frac{\sqrt{2}}{2}\right)^2} = \sqrt{\frac{3}{2}}.$$

Найдём синус угла  $OD_1O_1$ :

$$\sin \angle OD_1O_1 = \frac{OO_1}{OD_1} = \sqrt{\frac{2}{3}}.$$

Опустим перпендикуляр  $BH$  на плоскость  $ACD_1$ , он попадёт на продолжение отрезка  $D_1O$ . Длина отрезка  $BH$  и будет являться расстоянием от точки  $B$  до плоскости  $ACD_1$ . Рассмотрим четырёхугольник  $BB_1D_1D$ :  $BB_1 \parallel DD_1$ ,  $BB_1 = DD_1$  и  $BB_1 \perp A_1B_1C_1D_1$ , следовательно,  $BB_1D_1D$  — прямоугольник, откуда  $BD \parallel B_1D_1$ . Прямая  $HD_1$  — секущая при параллельных прямых  $BD$  и  $B_1D_1$ , поэтому углы  $NOB$  и  $OD_1O_1$  равны. Из прямоугольного треугольника  $OBH$  найдём  $BH$ :

$$BH = OB \sin \angle BOH = \frac{\sqrt{2}}{2} \cdot \frac{\sqrt{2}}{\sqrt{3}} = \frac{1}{\sqrt{3}} = \frac{\sqrt{3}}{3}.$$

Ответ:  $\frac{\sqrt{3}}{3}$ .

Содержание критерия	Баллы
Приведено обоснованное верное доказательство в пункте а) и обоснованно получен верный ответ в пункте б)	2
Выполнен только пункт а) или выполнен пункт б) при отсутствии обоснования пункта а)	1
Решение не соответствует ни одному из критериев, приведённых выше	0
<b>Максимальный балл</b>	<b>2</b>

\*Критерии распространяются и на случай использования координатного метода.

**Задание 15.** Решите неравенство  $\frac{2x^2}{x+3} + \frac{x+3}{x^2} \leq 3$ .

Решение.

Пусть  $\frac{x^2}{x+3} = t$ , тогда:  $2t + \frac{1}{t} - 3 \leq 0 \Leftrightarrow \frac{2t^2 - 3t + 1}{t} \leq 0$ . Найдем корни числителя левой части последнего неравенства.

$$2t^2 - 3t + 1 = 0 \Leftrightarrow t = \frac{3 \pm \sqrt{9-8}}{4} \Rightarrow \begin{cases} t = 1, \\ t = \frac{1}{2}. \end{cases}$$

$$\frac{2t^2 - 3t + 1}{t} \leq 0 \Leftrightarrow \frac{(t-1)(t-\frac{1}{2})}{t} \leq 0.$$

Неравенство решим методом интервалов.

Интервалы	$(-\infty; 0)$	$(0; \frac{1}{2})$	$(\frac{1}{2}; 1)$	$(1; +\infty)$
Знак выражения	-	+	-	+

Итак,  $t < 0$ ,  $\frac{1}{2} \leq t \leq 1$ . Перейдем к переменной  $x$ .  $\frac{x^2}{x+3} < 0 \Leftrightarrow x+3 < 0 \Leftrightarrow x < -3$  (\*)

$$\frac{1}{2} \leq \frac{x^2}{x+3} \leq 1 \Leftrightarrow \begin{cases} \frac{x^2}{x+3} - 1 \leq 0, \\ \frac{x^2}{x+3} - \frac{1}{2} \geq 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \frac{x^2 - x - 3}{x+3} \leq 0, \\ \frac{2x^2 - x - 3}{x+3} \geq 0 \end{cases} \Leftrightarrow \frac{(x^2 - x - 3) \cdot (2x^2 - x - 3)}{(x+3)^2} \leq 0.$$

Найдем корни числителя левой части последнего неравенства:

$$x^2 - x - 3 = 0 \Leftrightarrow x = \frac{1 \pm \sqrt{1+12}}{2} \Leftrightarrow x = \frac{1 \pm \sqrt{13}}{2}.$$

$$2x^2 - x - 3 = 0 \Leftrightarrow x = \frac{1 \pm \sqrt{1+24}}{4} \Leftrightarrow x = \frac{1 \pm 5}{4}.$$

Далее имеем:

$$\frac{(x^2 - x - 3) \cdot (2x^2 - x - 3)}{(x+3)^2} \leq 0 \Leftrightarrow \frac{(x - \frac{1-\sqrt{13}}{2}) \cdot (x - \frac{1+\sqrt{13}}{2}) \cdot (x+1) \cdot (x - \frac{3}{2})}{(x+3)^2} \leq 0 (**)$$

Решим последнее неравенство методом интервалов.

Заметим, что  $-3 < \frac{1-\sqrt{13}}{2} < -1 < \frac{3}{2} < \frac{1+\sqrt{13}}{2}$ .

Интервалы	$(-\infty; -3)$	$(-3; \frac{1-\sqrt{13}}{2})$	$(\frac{1-\sqrt{13}}{2}; -1)$	$(-1; \frac{3}{2})$	$(\frac{3}{2}; \frac{1+\sqrt{13}}{2})$	$(\frac{1+\sqrt{13}}{2}; +\infty)$
Знак выражения	+	+	-	+	-	+

Решения неравенства (\*\*):  $[\frac{1-\sqrt{13}}{2}; -1] \cup [\frac{3}{2}; \frac{1+\sqrt{13}}{2}]$ .

Объединив решения неравенств (\*) и (\*\*) будем иметь:  $(-\infty; -3) \cup \left[ \frac{1-\sqrt{13}}{2}; \frac{1+\sqrt{13}}{2} \right]$ .

Ответ:  $(-\infty; -3) \cup \left[ \frac{1-\sqrt{13}}{2}; -1 \right] \cup \left[ \frac{3}{2}; \frac{1+\sqrt{13}}{2} \right]$ .

Содержание критерия	Баллы
Обоснованно получен верный ответ	2
Допущена единичная ошибка, возможно, приведшая к неверному ответу, но при этом имеется верная последовательность всех шагов решения.	1
Решение не соответствует ни одному из критериев, перечисленных выше.	0
<b>Максимальный балл</b>	<b>2</b>

**Задание 16.** К окружности, вписанной в квадрат  $ABCD$ , проведена касательная, пересекающая стороны  $AB$  и  $AD$  в точках  $M$  и  $N$  соответственно.

а) Докажите, что периметр треугольника  $AMN$  равен стороне квадрата.

б) Прямая  $MN$  пересекает прямую  $CD$  в точке  $P$ . В каком отношении делит сторону  $BC$  прямая, проходящая через точку  $P$  и центр окружности, если  $AM : MB = 1 : 3$ ?

**Решение.**

а) Пусть окружность, вписанная в квадрат, касается его стороны  $AB$  в точке  $M_1$ , стороны  $AD$  — в точке  $N_1$ , а прямой  $MN$  — в точке  $T$ . По свойству касательных  $NN_1 = NT$ ,  $MM_1 = MT$  и  $AN_1 = AM_1$ . Тогда

$$\begin{aligned} AM + MN + AN &= AM + MT + NT + AN = \\ &= (AM + MM_1) + (NN_1 + AN) = \\ &= \frac{1}{2}AB + \frac{1}{2}AD = AB. \end{aligned}$$

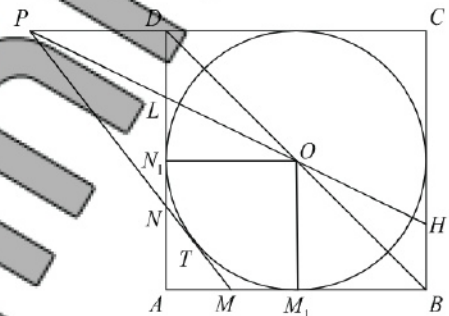
б) Положим  $AB = 12a$ .  $TN = NN_1 = x$ . Тогда

$$\begin{aligned} AM &= 3a, \\ AN &= AN_1 - NN_1 = 6a - x, \\ MN &= MT + TN = 3a + x. \end{aligned}$$

По теореме Пифагора  $AM^2 + AN^2 = MN^2$ , то есть

$$9a^2 + (6a - x)^2 = (3a + x)^2.$$

Отсюда находим, что  $x = 2a$ . Тогда  $AN = 4a$  и  $MN = 5a$ . Пусть  $O$  — центр окружности, а прямая  $PO$  пересекает стороны  $AD$  и  $BC$  в точках  $L$  и  $H$  соответственно. Из равенства треугольников  $DOL$  и  $BOH$  следует, что  $DL = BH$ , поэтому  $\frac{BH}{HC} = \frac{DL}{LA}$ . Окружность вписана в угол  $MPC$ , значит,  $PL$  — биссектриса треугольника  $DPN$ , который подобен треугольнику  $AMN$ . Используя свойство биссектрисы и подобие, находим:



$$\frac{DL}{LN} = \frac{PD}{PN} = \frac{AM}{MN} = \frac{3}{5},$$

откуда

$$DL = \frac{3}{8}DN.$$

учитывая, что  $DN = DA - AN = 12a - 4a = 8a$ , находим, что  $DL = 3a$ ,  $LA = 9a$ .

$$\frac{BH}{HC} = \frac{DL}{LA} = \frac{1}{3}.$$

Ответ: б) 1 : 3.

#### Приведем решение пункта б)

Часть б) можно решить проще, доказав, что  $\triangle OHB = \triangle OMA$ . Оттуда сразу следует, что  $MA = HB$  при любом положении точки  $M$ . Действительно,  $OB = OA$ ,  $\angle OAM = \angle OBH = 45^\circ$ , а  $\angle MPC = \angle TOM_1$  — угол между касательными и соответствующими им радиусами. Далее,  $PH$  — биссектриса  $\angle MPC$ ,  $OM$  — биссектриса  $\angle TOM_1$ . Следовательно,  $\angle HPC = \angle MOM_1$ ,  $\angle PHC = \angle OMM_1$ ,  $\angle OHB = \angle OMA$ ,  $\angle BOH = \angle AOM$ . Треугольники  $OHB$  и  $OMA$  равны по второму признаку.

Содержание критерия	Баллы
Имеется верное доказательство утверждения пункта а), и обоснованно получен верный ответ в пункте б)	3
Получен обоснованный ответ в пункте б) ИЛИ имеется верное доказательство утверждения пункта а), и при обоснованном решении пункта б) получен неверный ответ из-за арифметической ошибки	2
Имеется верное доказательство утверждения пункта а) ИЛИ при обоснованном решении пункта б) получен неверный ответ из-за арифметической ошибки ИЛИ обоснованно получен верный ответ в пункте б) с использованием утверждения пункта а), при этом пункт а) не выполнен	1
Решение не соответствует ни одному из критериев, приведённых выше	0
<b>Максимальный балл</b>	<b>3</b>

**Задание 17.** Курс доллара в течение двух месяцев увеличился на одно и то же число процентов ежемесячно, но не более, чем в 1,5 раза. За сумму, вырученную от продажи в начале первого месяца одного доллара, к концу второго месяца можно было купить на 9 центов меньше, чем в конце первого месяца. На сколько процентов уменьшился курс рубля за два месяца?

**Решение.**

Пусть в начале первого месяца курс доллара составлял  $x$  рублей, и он (курс доллара) каждый месяц увеличивался на  $y$  процентов. Тогда к концу первого месяца (к началу второго месяца) он составляет  $x \cdot (1 + 0,01y)$  рублей, к концу второго месяца —  $x \cdot (1 + 0,01y)^2$  рублей. Очевидно, что  $(1 + 0,01y)^2 \leq 1,5$ .

В начале первого месяца от продажи 1\$ можно было выручить  $x$  рублей. А это значит, что в конце первого месяца за  $x$  рублей можно было купить  $\frac{1}{1 + 0,01y}$  \$, в конце второго месяца  $\frac{1}{(1 + 0,01y)^2}$  \$. Разность этих двух выражений составляет 0,09 \$.

Решим уравнение  $\frac{1}{1 + 0,01y} - \frac{1}{(1 + 0,01y)^2} = 0,09$ . Пусть  $1 + 0,01y = a$ , тогда:

$$\begin{aligned} \frac{1}{a} - \frac{1}{a^2} = 0,09 &\Leftrightarrow \frac{a-1}{a^2} = 0,09 \Leftrightarrow \frac{100a-100}{a^2} = 9 \Leftrightarrow 9a^2 - 100a + 100 = 0 \Leftrightarrow a = \frac{50 \pm \sqrt{2500 - 900}}{9} \Leftrightarrow \\ &\Leftrightarrow a = \frac{50 \pm \sqrt{1600}}{9} \Leftrightarrow a = \frac{50 \pm 40}{9} \Leftrightarrow \begin{cases} a = 10, \\ a = \frac{10}{9}. \end{cases} \end{aligned}$$

Однако, если  $1 + 0,01y = 10$ , то  $0,01y = 9 \Leftrightarrow y = 900$  (ежемесячное увеличение курса доллара на 900% невозможно, так как в течение двух месяцев он увеличился не более, чем на 50 процентов).

Докажем, что  $a = \frac{10}{9}$  удовлетворяет условию задачи, поскольку

$$1 + 0,01y = \frac{10}{9} \Leftrightarrow 0,01y = \frac{1}{9} \Leftrightarrow y = \frac{100}{9}; \left(1 + \frac{1}{9}\right)^2 = \left(\frac{10}{9}\right)^2 = \frac{100}{81} = 1\frac{19}{81} < 1,5.$$

Таким образом, за 2 месяца курс доллара по отношению к 1 рублю вырос в  $\frac{100}{81}$  раз. А это значит, что за это же время курс рубля по отношению к 1 \$ уменьшился во столько же раз.

Если в начале первого месяца за  $x$  рублей можно было купить 1 \$, то к концу второго месяца за  $x$  рублей стало возможным купить всего лишь 0,81 \$. То есть курс рубля упал на 0,19 \$. Эта разность составляет 19 %.

**Подход 2.**

Пусть курс доллара к концу первого месяца вырос в  $x$  раз. Тогда рост курса доллара к концу второго месяца составит  $x^2$  раза.

За сумму, вырученную от продажи одного доллара к концу 1-го месяца, стало возможным купить  $\frac{1}{2}$  \$, этот показатель к концу второго месяца составил  $\frac{1}{x^2}$  \$.

В соответствии с условием задачи:

$$\begin{aligned} \frac{1}{x} - \frac{1}{x^2} = \frac{9}{100} &\Leftrightarrow 100x - 100 = 9x^2 \Leftrightarrow 9x^2 - 100x + 100 = 0 \Leftrightarrow x = \frac{50 \pm \sqrt{2500 - 900}}{9} \Leftrightarrow \\ &\Leftrightarrow x = \frac{50 \pm \sqrt{1600}}{9} \Leftrightarrow x = \frac{50 \pm 40}{9} \Leftrightarrow \begin{cases} x = 10 \\ x = \frac{10}{9}. \end{cases} \end{aligned}$$

Из полученного имеем:  $\begin{cases} x^2 = 100 \\ x^2 = \frac{100}{81}. \end{cases}$

Но  $100 > 1,5$ , тогда как  $\frac{100}{81} < 1,5$ . Значит, повышение курса доллара за 2 месяца составило в  $\frac{100}{81}$  раз. А это значит, что снижение курса рубля по отношению к доллару составило также  $\frac{100}{81}$  раз.

Если в начале первого месяца за  $y$  рублей можно было купить 1 \$, то к концу второго месяца за те же  $y$  рублей стало возможным купить всего  $\frac{81}{100}$  \$. Следовательно, курс рубля упал на  $\left(1 - \frac{81}{100} = \frac{19}{100}\right)$  у. е., т. е. курс рубля упал на 19%.

Ответ: на 19 %.

Содержание критерия	Баллы
Обоснованно получен верный ответ.	3
Условие задачи верно сведено к решению математической (вычислительной, алгебраической, геометрической и т.д.) задачи, но получен неверный ответ из-за вычислительной ошибки ИЛИ получен верный ответ, но решение недостаточно обосновано.	2
Условие задачи верно сведено к решению математической (вычислительной, алгебраической, геометрической и т.д.) задачи, но при этом решение не завершено.	1
Решение не соответствует ни одному из критериев, приведённых выше.	0
<b>Максимальный балл</b>	<b>3</b>

**Задание 18.** Найдите все значения параметра  $a$ , при каждом из которых неравенство

$$\left| \frac{x^2 + x - 2a}{x + a} - 1 \right| \leq 2$$

не имеет решений на интервале  $(1; 2)$ .

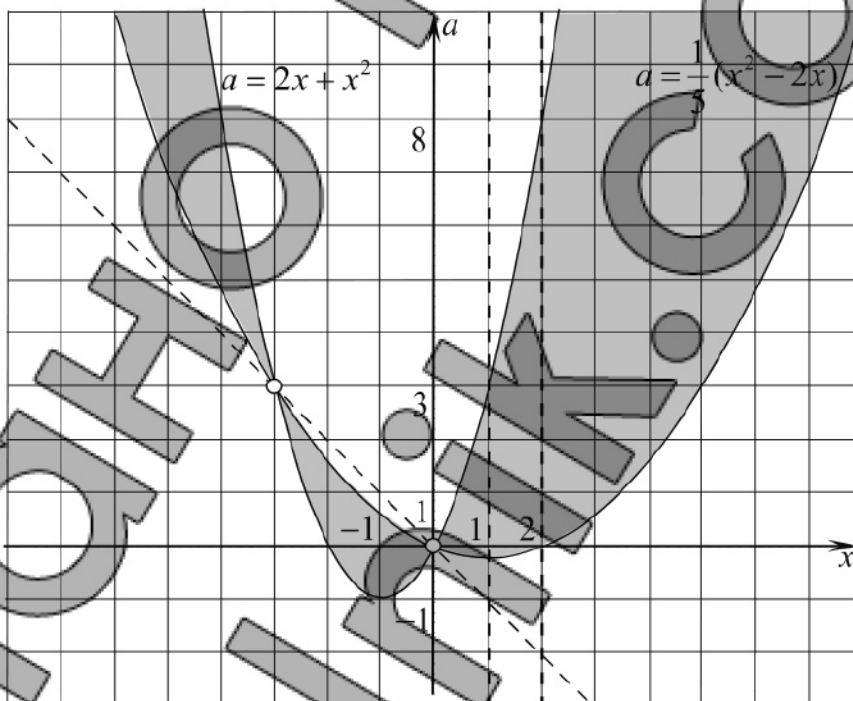
Критерии оценивания выполнения задания	Баллы
Обоснованно получен правильный ответ.	4
С помощью верного рассуждения получено множество значений $a$ , отличающееся от искомого конечным числом точек.	3
С помощью верного рассуждения получены все граничные точки искомого множества значений $a$	2
Верно найдена хотя бы одна граничная точка искомого множества значений $a$	1
Решение не соответствует ни одному из критериев, перечисленных выше.	0

**Решение.**

Преобразуем исходное неравенство:

$$\left| \frac{x^2 + x - 2a}{x + a} - 1 \right| \leq 2 \Leftrightarrow \left| \frac{x^2 - 3a}{x + a} \right| \leq 2 \Leftrightarrow \begin{cases} |x^2 - 3a| \leq 2|x + a|, \\ x \neq -a \end{cases} \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} (x^2 - 3a)^2 - 4(x + a)^2 \leq 0, \\ x \neq -a \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} (x^2 - 2x - 5a)(x^2 + 2x - a) \leq 0, \\ x \neq -a. \end{cases}$$



Решим неравенство на интервале (1; 2):

$a \leq -\frac{1}{5}$ : пустое множество

$-\frac{1}{5} < a < 0$ :  $(1, 1 + \sqrt{1 + 5a}]$

$0 \leq a \leq 3$ : (1; 2)

$3 < a < 8$ :  $[-1 + \sqrt{1 + a}, 2)$

$a \geq 8$ : пустое множество

Ответ:  $(-\infty; -\frac{1}{5}] ; [8; +\infty)$ .

**Задание 19.** Из 26 последовательных нечетных чисел 1, 3, 5, ... , 51 выбрали 11 различных чисел, которые записали в порядке возрастания. Пусть  $A$  - шестое по величине среди этих чисел, а  $B$  - среднее арифметическое выбранных одиннадцати чисел.

а) Может ли  $B - A$  равняться  $\frac{3}{11}$ ?



б) Может ли  $B - A$  равняться  $\frac{4}{11}$ ?

в) Найдите наибольшее возможное значение  $B - A$ .

**Решение.**

а) Если  $A - \frac{S}{11} = \frac{3}{11}$ , то  $S - 3 = 11A$ , где  $S$  — сумма чисел в множестве. Поскольку это сумма одиннадцати нечетных чисел, то  $S$  нечетно, поэтому  $S - 3$  четно, а  $11A$  — нечетно. Противоречие.

б) Здесь имеем аналогично  $11A = S - 4$ . Это возможно, например, для чисел 1, 3, 5, ..., 19, 25. Тогда  $A = 11$  и  $S = 125$ .

в) Если последние числа — еще не максимально возможные — увеличим их до максимально возможных (от этого  $B$  увеличится). Если какие-то из наименьших чисел не максимально возможные (то есть  $A - 2, A - 4, \dots$  — поступим аналогично. Итак, самый хороший пример обязательно выглядит так:  $A - 10, A - 8, A - 6, A - 4, A - 2, A, 43, 45, 47, 49, 51$ . Осталось выбрать наилучшее  $A$ . Имеем:

$$B - A = \frac{A - 10 + A - 8 + A - 6 + A - 4 + A - 2 + A + 43 + 45 + 47 + 49 + 51}{11} - A = \frac{205 - 5A}{11}$$

поэтому выгодно брать  $A$  поменьше. Значит,  $A = 11$ , меньшее число не может быть шестым по величине. Поэтому наибольшее значение будет  $\frac{150}{11}$ .

Ответ: а) нет; б) да; в)  $\frac{150}{11}$ .

Критерии оценивания выполнения задания	Баллы
Верно получены все перечисленные (см. критерий на 1 балл) результаты.	4
Верно получены три из перечисленных (см. критерий на 1 балл) результатов.	3
Верно получены два из перечисленных (см. критерий на 1 балл) результатов.	2
Верно получен один из следующих результатов: — пример в п. а; — обоснованное решение п. б; — обоснование в п. в того, что $S$ может принимать все целые значения (отличные от $-1$ и $1$ ); — обоснование в п. в того, что равенства $S = -1$ и $S = 1$ невозможны.	1
Решение не соответствует ни одному из критериев, перечисленных выше.	0
Максимальный балл	4

**Перевод набранных первичных баллов в  
стобалльную и в пятибалльную системы**

Первичный	Тестовый
0	0
1	5
2	9
3	14
4	18
5	23
6	27
7	33
8	39
9	45
10	50
11	56
12	62
13	68
14	70
15	72
16	74
17	76
18	78
19	80
20	82
21	84
22	86
23	88
24	90
25	92
26	94
27	96
28	98
29	99
30	100
31	100
32	100

Тестовый	Оценка
0-26	2
27-46	3
47-64	4
65-100	5