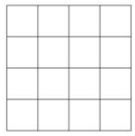
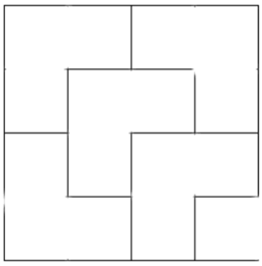
Решения и критерии проверки задач Второго этапа Всесибирской олимпиады школьников 2018-2019 г.г. по математике 7 класс

Каждая задача оценивается в 7 баллов

7.1. Из 40 спичек сложили квадратную сетку 4 на 4 как показано на рисунке (каждый отрезок длины 1 – это одна спичка). Уберите 11 спичек так, чтобы оставшиеся не ограничивали ни одного прямоугольника.



Ответ: можно, например, убрать следующим образом:



Критерии: любой верный пример без обоснования – 7 баллов.

7.2. У Арсения есть 10 столитровых вёдер, в которые налито 1, 2, 3, … 9, 10 литров воды соответственно. Арсению разрешается взять два любых ведра и перелить из первого во второе ровно столько воды, сколько уже есть во втором ведре. Может ли Арсений собрать всю воду в одном ведре?

Ответ: нет
Решение: всего в вёдрах 1 + 2 + … + 10 = 55 литров воды – нечётное количество. А при любом переливании мы удваиваем количество воды в ведре, т.е., в частности, делаем чётным. Значит, получить нечётное количество в последнем ведре никак не выйдет.
Критерии: замечено, что после переливания всегда в ведре чётное количество воды, дальнейших продвижений нет – 3 балла.
Только ответ – 0 баллов.

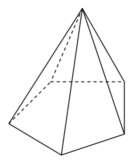
7.3. Егор взял у Никиты в долг 28 рублей, а затем отдал их обратно четырьмя платежами. Оказалось, что Егор всегда возвращал целое количество рублей, а сумма выплаты каждый раз росла и нацело делилась на предыдущую. Какую сумму отдал Егор последней?

Ответ: 18 рублей
Решение:
1) Если в первый раз Егор выплатил a рублей, то во второй – не меньше $2a$, в третий – не меньше $4a$, в четвертый – не меньше $8a$, а всего – не меньше $15a$. Поскольку $15a \leq 28$, получаем, что $a = 1$.
2) Во второй раз он заплатил 2 или 3 рубля (потому что если 4, то заплатил хотя бы $1+4+8+16 = 29 > 28$).
2.1) Если он заплатил 2 рубля, то ему осталось выплатить 25 рублей, а между тем в этом случае все выплаты далее будут чётными. Этот случай невозможен.
2.2) Значит, он заплатил 3 рубля, и за два последних раза ему осталось выплатить 24 рубля. Пусть в третий раз он заплатил в a раз больше, чем во второй, а в четвертый – в b раз больше, чем во третий. Тогда $3a + 3ab = 24$, то есть $a + ab = a(b+1) = 8$. Получается, что a и $b+1$ – степени двойки, причем $b > 1$, а это возможно только при $a = 2$ и $b = 3$. Отсюда – ответ.

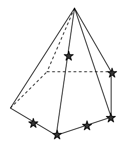
Критерии:
Только ответ 0 – 0 баллов.

Только ответ с проверкой (выписаны все 4 суммы, показано, что все условия выполнены) – 1 балл, он не суммируется ни с чем.
Каждый из пунктов 1), 2), 2.1) стоит по одному баллу, эти баллы суммируются.
В целом верное решение, но 2.2) доказывается неполным перебором – не более 5 баллов.

7.4. На поверхности пятиугольной пирамидки (см. рис.) в попарно различных точках живёт несколько гномиков, причём они могут жить как внутри граней, так и на рёбрах или в вершинах. Оказалось, что на каждой грани (включая вершины и рёбра, её ограничивающие) живёт разное число гномиков. Какое минимальное число гномиков живёт на пирамидке?



Ответ: 6
Решение: Граней всего 6, поэтому на самой “населенной” из них живёт не менее 5 гномиков. Если всего гномиков ровно 5, то все они живут на одной грани (пусть это грань A), поэтому те грани, на которых живут 4 и 3 гномика (пусть B и C соответственно), являются соседними с ней. Тогда на ребре A-B должно жить 4, а на ребре A-C – 3 гномика. Тогда всего гномиков уже хотя бы 7, причём только одного мы могли посчитать дважды – того, кто сидит в вершине, соединяющей грани A, B и C. То есть гномиков хотя бы 6 – противоречие.
Пример на 6 гномиков на рисунке.



Критерии:
Только ответ – 0 баллов.
Только верный пример – 2 балла.
Только доказательство того, что меньше 5 быть не может – 1 балл.
Только доказательство того, что меньше 6 быть не может – 3 балла.
Эти баллы НЕ складываются.
Обоснование примера не требуется.

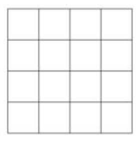
7.5. За круглым столом рассаживаются 47 депутатов из 12 различных регионов, причём они пытаются добиться того, чтобы среди любых 15 подряд сидящих людей были представители всех регионов. Смогут ли депутаты осуществить задуманное?

Ответ: нет
Решение: Предположим, что смогут. Заметим, что найдётся регион, из которого приехало не более трёх депутатов. Иначе депутатов всего хотя бы $12*4 = 48 > 47$.
Рассмотрим этих троих (или менее) депутатов. Они сидят в кругу, и между каждыми двумя соседними сидит не более 14 человек, т.к. иначе найдутся 15, среди которых нет именно этого региона. Тогда всего в кругу сидит не более $3 + 14*3 = 45$ (3 наших депутата + 3 промежутка по 14) человек, а должно быть 47. Противоречие.
Критерии:
Только ответ – 0 баллов.
Только замечено, что найдётся регион с <4 депутатами – 2 балла.

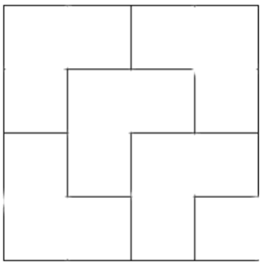
Решения и критерии проверки задач Второго этапа Всесибирской олимпиады школьников 2018-2019 г.г. по математике 8 класс

Каждая задача оценивается в 7 баллов

8.1. Из 40 спичек сложили квадратную сетку 4 на 4 как показано на рисунке (каждый отрезок длины 1 – это одна спичка). Уберите 11 спичек так, чтобы оставшиеся не ограничивали ни одного прямоугольника.



Ответ: можно, например, убрать следующим образом:

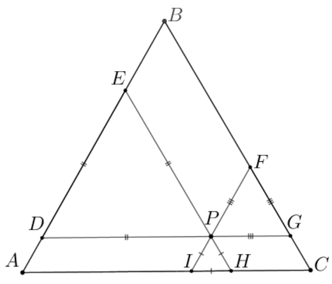


Критерии: любой верный пример без обоснования – 7 баллов.

8.2. У Арсения есть 2018 вёдер, в которые налито 1, 2, 3, … 2017, 2018 литров воды соответственно. Арсению разрешается взять два любых ведра и перелить из первого во второе ровно столько воды, сколько уже есть во втором ведре. Может ли Арсений собрать всю воду в одном ведре? Все вёдра достаточно большие, чтобы вся вода в них могла влезть.

Ответ: нет
Решение: всего в вёдрах 1 + 2 + … + 2018 = 2018*2019/2 = 1009*2019 литров воды – нечётное количество. А при любом переливании мы удваиваем количество воды в ведре, т.е., в частности, делаем чётным. Значит, получить нечётное количество в последнем ведре никак не выйдет.
Критерии: замечено, что после переливания всегда в ведре чётное количество воды, дальнейших продвижений нет – 3 балла.
Только ответ – 0 баллов.

8.3. В равностороннем треугольнике *ABC* через случайную точку внутри него провели три прямые: параллельно *AB* до пересечения с *BC* и *CA*; параллельно *BC* до пересечения с *AB* и *CA*; параллельно *CA* до пересечения с *BC* и *AB*. Докажите, что сумма трёх полученных отрезков равна удвоенной стороне треугольника *ABC*.



Решение: Пусть внутри треугольника выбрана произвольная точка *P*. Проведём отрезки и обозначим их так, как показано на рисунке. Очевидно, что треугольники *DEP*, *PFG*, *PIH* равносторонние, так как в них все углы по 60 градусов.
Далее заметим, что *BFPE* – параллелограмм, так как противоположные стороны в нём попарно параллельны. Значит, *PF* = *BE*. Аналогично *ADPI* – параллелограмм, следовательно, *AD* = *PI*.
Осталось заметить, что сумма трёх отрезков равна *EH* + *FI* + *GD* = *EP* + *PH* + *FP* + *PI* + *GP* + *PD* = 2*ED* + 2*PF* + 2*PI* = 2*ED* + 2*BE* + 2*AD* = 2*AB*, что и требовалось доказать.
Критерии: Рассмотрение частных случаев расположения точки *P* ничего не стоит.

8.4. По кольцевой дороге бегают Никита и Егор, стартовавшие из одного места в противоположные стороны. Известно, что Никита пробегает круг на 12 секунд быстрее, чем Егор, но всё равно тратит на это больше 30 секунд. Оказалось, что в седьмой раз после старта они встретились в том же месте, откуда начали. За какое время каждый из них пробегает круг?

Ответ: Никита за 36 секунд, Егор за 48 секунд.
Решение: Заметим, что между каждыми двумя встречами мальчики пробегают в сумме один круг. Значит, до 7-й встречи они вместе пробежали 7 кругов. Также отметим, что каждый из них пробежал целое число кругов, т.к. они встретились на линии старта. Так как Никита бегал быстрее, то он пробежал больше кругов, чем Егор, т.е. Никита пробежал 4,5 или 6 кругов (7 не мог, иначе бы Егор стоял), а Егор соответственно – 3, 2 или 1.
Пусть теперь Никита тратит на круг *t* секунд, а Егор *t*+12 секунд. Рассмотрим все случаи, сколько кругов до 7-й встречи пробежал Никита.

1) 4 круга, а Егор – 3. Тогда время, за которое Никита пробегает 1 круг, в 4/3 раза меньше, чем время Егора (за одно и то же время один пробежал 4 круга, а другой – 3). Значит, $t = 3/4(t + 12)$, откуда $t/4 = 9$, т.е. $t = 36$, а у Егора время $t + 12 = 48$ секунд.
2) 5 кругов, а Егор – 2. Аналогично получаем, что $t = 2/5(t + 12)$, откуда $t = 8$, что не подходит под условие.
3) 6 кругов, а Егор – 1. Получим, что $t = 1/6(t + 12)$, откуда $t = 12/5$, что тоже не подходит.
Значит, подходит только первый случай.
Критерии:
Ответ, ответ с проверкой – 0 баллов.
Замечено, что мальчики в сумме пробежали 7 кругов – 1 балл.
Замечено, что Никита пробежал 4-6 кругов – 1 балл, суммируется с предыдущим.
Потерян один случай – не более 5 баллов.
Потеряно более одного случая – не более 3 баллов.

8.5. За круглый стол сели 410 депутатов, причём каждый из них являлся либо рыцарем, который всегда говорит правду, либо лжецом, который всегда лжёт. Каждый из депутатов сказал: “Среди моих двадцати соседей слева и двадцати соседей справа в сумме ровно 20 лжецов”. Известно, что за столом по крайней мере половина людей – лжецы. Сколько за столом рыцарей?
Ответ: ни одного.
Решение: Разобьём всех сидящих за столом на десять групп по 41 человеку. Тогда хотя бы в одну группу попадёт хотя бы 21 лжец. Иначе в каждой группе их максимум 20, т.е. всего не более $20*10 = 200$, что меньше половины от общего числа. Рассмотрим эту группу.
Если в её центре сидит рыцарь, то он говорит правду, и в этой группе ровно 20 лжецов. Но мы уже установили, что их там хотя бы 21. Противоречие. Значит, в центре сидит лжец, а всего их в группе хотя бы 22 (всего ровно 21 быть не может, т.к. иначе центральный говорил бы правду). Рассмотрим теперь левого соседа центрального лжеца. Среди его 40 соседей есть хотя бы 21 лжец, т.к. одного крайнего соседа (может быть, лжеца) мы потеряли, сдвинувшись влево, но приобрели соседа-лжеца, который ранее был центральным. Повторяя рассуждения для него, получаем, что он тоже лжец. Сдвинемся опять влево и продолжим этот процесс. В конце концов мы получим, что все, сидящие за столов, являются лжецами.
Критерии:
Только ответ, ответ с проверкой – 0 баллов.
Доказано, что найдётся группа с 21 лжецом – 2 балла.
Доказано, что в этой группе в центре сидит лжец – ещё 1 балл.

Всесибирская открытая олимпиада школьников по математике
Второй этап **2018-2019 г.г.**

9 класс ***Каждая задача оценивается в 7 баллов***

9.1. Какую минимальную сумму цифр в десятичной записи может иметь число $f(n)=17n^2-11n+1$, где n пробегает все натуральные числа?

Ответ.2.

Решение. При $n=8$.число $f(n)$ равно 1001, следовательно, сумма его цифр равна 2. Если бы $f(n)$ при некотором n имело сумму цифр, равную 1, то оно бы имело вид 100,,,00 и либо равнялось бы 1, либо делилось бы на 10. Функция действительного переменного $f(x)$ достигает минимума при $x=\frac{11}{34}<1$, следовательно, возрастает при всех натуральных значениях x. Поэтому $f(n)\geq f(1)=7>1$ и значение 1 $f(n)$ принимать не может. Далее, легко заметить что $f(n)$ всегда является числом нечётным, поэтому не может делиться на 10. Следовательно, минимальная сумма цифр числа $f(n)=17n^2-11n+1$ равна 2 и достигается при $n=8$.

Критерии оценивания. Верный ответ с проверкой при $n=8$: 2 балла. Доказано, что $f(n)>1$ и значение 1 $f(n)$ принимать не может: 2 балла. Доказано, что $f(n)$ всегда является числом нечётным, поэтому не может делиться на 10: 3 балла.

9.2. Какой цифрой может заканчиваться число $f(x)=[x]+[3x]+[6x]$, где x - произвольное положительное действительное число? Здесь $[x]$ обозначает целую часть числа x, то есть наибольшее целое число, не превосходящее x.

Ответ. 0,1,3,4,6,7**.**

Решение. Обозначим $x=[x]+a$, где $0\leq a<1$- дробная часть x. Тогда легко понять, что $f(x)=[x]+[3x]+[6x]=10[x]+[a]+[3a]+[6a]$, поэтому от целой части x последняя цифра не зависит. Рассмотрим возможные значения его дробной части, разобьём интервал $[0,1)$ на шесть равных интервалов: $\left[0,\frac{1}{6}\right),\left[\frac{1}{6},\frac{2}{6}\right),\ldots,\left[\frac{4}{6},\frac{5}{6}\right),\left[\frac{5}{6},1\right)$. Значения $[a]$ на всех интервалах равны 0, значения $[3a]$ равны 0,0,1,1,2,2 соответственно, а значения $[6a]$ равны 0,1,2,3,4,5. Складывая соответствующие одинаковым интервалам значения, получим множество возможных последних цифр числа $f(x)=[x]+[3x]+[6x]$: это будут 0,1,3,4,6,7.

Критерии оценивания. Доказано, что последняя цифра x зависит только от дробной части x: 2 балла. Доказано, чем оканчиваются числа $[a],[3a]$ и $[6a]$ в зависимости от интервала:4 балла. Только приведены примеры, когда последние цифры равны 0,1,3,4,6,7: 1 балл.

9.3. Внутри равнобедренного треугольника АВС с равными сторонами АВ=ВС и углом 80 градусов при вершине В, взята точка М такая, что угол

MAC равен 10 градусов, а угол MCA равен 30 градусов. Найти величину угла AMB.
Ответ. 70 градусов.
Решение. Проведём из вершины B прямую, перпендикулярную стороне AC, точки её пересечения с прямыми AC и CM обозначим за P и T соответственно. Ввиду того, что угол MAC меньше угла MCA, сторона CM треугольника MAC меньше стороны AM, точка M лежит ближе к C, чем к A, поэтому T лежит на продолжении отрезка CM. Точка T лежит на серединном перпендикуляре AP к отрезку AC, значит треугольник ATC – равнобедренный, поэтому угол TAC равен 30 градусов, следовательно, углы BAT и MAT равны 20 градусов. Величины углов ABP=ABC/2=80/2=40 и AMT=MAC + MCA=10+30=40 равны, следовательно треугольники ABT и AMT равны по общей стороне AM и прилежащим к ней углам. Значит, равны их соответствующие стороны AB и AM и треугольник AMB – равнобедренный. Следовательно, его угол AMB при основании MB равен (180-BAM)/2=(180-(50-10))/2= (180-40)/2=70 градусов.
Критерии оценивания. Доказательство того, что T лежит на продолжении отрезка CM:: 1 балл. Доказательство равнобедренности треугольника ATC: 1 балл. Доказательство равнобедренности треугольника AMB: 4 балла. Нахождение угла AMB: 1 балл.

9.4. Докажите, что для произвольных положительных чисел a,b,c выполнено неравенство $\frac{ab}{a+b}+\frac{bc}{b+c}+\frac{ac}{a+c}\le\frac{a+b+c}{2}$.
Доказательство. В силу положительности a,b,c имеем $\frac{ab}{a+b}\le\frac{a+b}{4}\Leftrightarrow 4ab\le(a+b)^2\Leftrightarrow 0\le(a-b)^2$, что, очевидно, верно. Аналогично $\frac{bc}{b+c}\le\frac{b+c}{4},\frac{ac}{a+c}\le\frac{a+c}{4}$. Сложив три доказанных неравенства, получаем требуемое в условии.
.**Критерии оценивания**. Отсутствие упоминания положительности чисел при умножении на знаменатель: минус: 1 балл.

9.5. Последовательность различных натуральных чисел $a_n, n=1,2,3...$ такова, что $a_1=1, a_{n+1}\le 2n$ при всех $n\ge 1$. Доказать, что для любого натурального числа m найдутся такие члены этой последовательности a_p и a_q, что $a_q-a_p=m$.
Доказательство. Для произвольного фиксированного натурального m рассмотрим множество из $m+1$ числа $a_1,a_2,...a_{m+1}$, все они по условию, различны и не превосходят $2m$. Разобьём все натуральные числа от 1 до $2m$ на m пар $\{1,m+1\},\{2,m+2\},...\{m,2m\}$, по принципу Дирихле одна из этих пар содержит два из чисел $a_1,a_2,...a_{m+1}$, которые и образуют искомую в условии пару членов последовательности с разницей m.
Критерии оценивания.

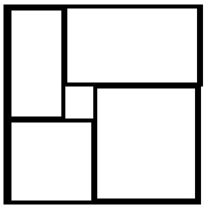
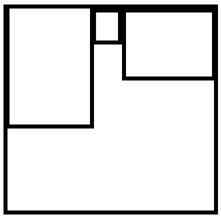
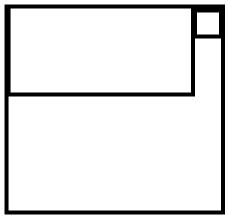
Всесибирская открытая олимпиада школьников по математике
Второй этап 2018-2019 г.г.
10 класс ***Каждая задача оценивается в 7 баллов***

10.1. Найти все четырёхзначные числа $\overline{xyzt}$, где все цифры x, y, z, t различны и не равны 0, такие, что сумма всех четырёхзначных чисел, получаемых из $\overline{xyzt}$ всевозможными перестановками цифр, в 10 раз больше числа $\overline{xxxx}$.
Ответ. Число 9123 и все числа, получающиеся из него перестановкой трёх последних цифр, всего 6 ответов.
Решение. Четырёхзначных чисел, получаемых из $\overline{xyzt}$ всевозможными перестановками цифр будет 24, всего в них в каждом разряде каждая из цифр x, y, z, t встречается ровно 6 раз. Следовательно, сумма всех таких чисел равна $6(x+y+z+t)(1000+100+10+1)=6666(x+y+z+t)$, что, по условию, равно $11110x$. Отсюда $3(y+z+t)=2x$. По условию, все цифры x, y, z, t различны и не равны 0, следовательно, левая часть равенства не меньше 3(1+2+3)=18, откуда получаем единственную возможность $x=9$ а y, z, t являются любой перестановкой цифр 1,2,3.
Критерии оценивания. Если приведён полный верный ответ с проверкой: 1 балл. Верное нахождение суммы в левой части равенства:3 балла.

10.2. Найти все решения системы уравнений в действительных числах:
$$\begin{cases} x^3-x+1=y^2, \\ y^3-y+1=x^2. \end{cases}$$
Ответ.. $(\pm1,\pm1)$ - всего 4 решения.
Решение. Перенесём в каждом уравнении 1 направо и перемножим уравнения, получив равенство $(x^2-1)(y^2-1)xy=(x^2-1)(y^2-1)$, откуда либо $x^2-1=0$, либо $y^2-1=0$, либо $xy=1$. В двух первых случаях сразу получаем 4 решения $(x,y)=(\pm1,\pm1)$. В третьем случае, заменяя в первом уравнении y на $\frac{1}{x}$ и приведя к общему знаменателю, получаем уравнение $x^5-x^3+x^2-1=0$. Разлагаем его на множители: $(x^2-1)(x^3+1)=(x^2-1)(x+1)(x^2-x+1)=0$. Две первых скобки дают уже найденные решения, третья скобка действительных корней не имеет, так как её дискриминант меньше 0. Следовательно, решениями системы являются 4 пары $(x,y)=(\pm1,\pm1)$.
Критерии оценивания. Приведены верные ответы без доказательства, что других нет: 1 балл. Потеря части решений: минус 1-3 балла.

10.3. Найти все натуральные числа n такие, что квадрат размера n на n клеток можно разрезать по линиям сетки на одноклеточный квадратик и четыре прямоугольника, все девять размеров сторон которых попарно различны.
Ответ. Все $n \geq 11$.

Решение. Покажем, что схема разрезания должна выглядеть, как показано на левом рисунке (заметим, что в решении **это доказательство не обязательно**, достаточно просто указать саму схему!):

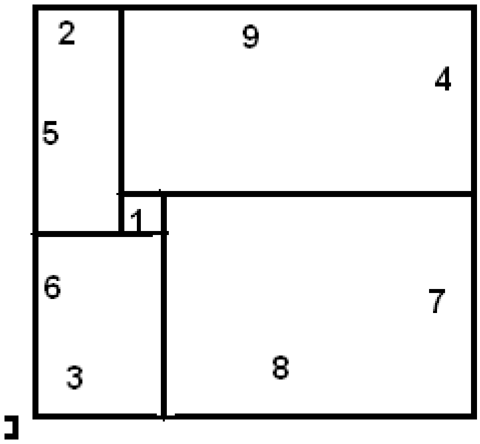
Действительно, если квадратик будет прилегать к стороне или вершине квадрата, то рядом с ним будут два или один прямоугольника с большими, чем 1 сторонами (см. центральный и правый рисунки), и к стороне квадратика, не прилегающей к этим прямоугольникам и сторонам квадрата, ничто с большими, по условию, сторонами прилегать не может.

После этого заметим, что каждая вершина квадрата содержится в своём прямоугольнике разбиения. В противном случае одна из сторон одного из прямоугольников совпадает со стороной квадрата, а вторая его сторона меньше, отрезав его, мы получим разбиение оставшегося прямоугольника на квадратик и три прямоугольника с разными сторонами. Повторяя предыдущее рассуждение получим, что квадратик снова должен не прилегать к сторонам оставшегося прямоугольника, а значит, своими четырьмя сторонами прилегать к четырём разным прямоугольникам разбиения, чего не может быть, поскольку их тут осталось всего три.

Из сказанного выше следует, что схема разрезания должна выглядеть так, как показано на левом рисунке:

Найдём минимально возможную площадь искомого квадрата. Пусть длины девяти сторон частей разбиения в порядке возрастания равны $a_1 = 1, a_2 \geq 2, \ldots, a_9 \geq 9$. Чтобы найти минимальную общую площадь квадратика и 4 прямоугольников с такими сторонами, воспользуемся широко известным «транснеравенством», которое, в частности, утверждает, что для любых чисел $a_1 \leq a_2 \leq .. \leq a_n$ и $b_1 \leq b_2 \leq .. \leq b_n$ минимум сумм вида $S(\sigma) = \sum_{i=1}^{n} a_i b_{\sigma(i)}$, где $\sigma(1), \sigma(2), \ldots, \sigma(n)$ - произвольная перестановка чисел $1, 2, \ldots, n$, достигается на сумме $S(\sigma)$ для $\sigma(i) = n + 1 - i, i = 1, \ldots, n$, то есть когда каждое i - ое в порядке возрастания число первого множества умножается на i - ое в порядке убывания число второго множества. Отсюда следует, что минимальная площадь квадратика и 4 прямоугольников равна $1 + a_2a_9 + a_3a_8 + a_4a_7 + a_5a_6 \geq 1 + 18 + 24 + 28 + 30 = 101 > 10^2$. Следовательно, минимально возможная длина стороны большого квадрата равна 11.

Укажем способ разрезания квадрата со стороной $n = 11$ требуемым в условии способом, длины сторон соответствующих прямоугольников указаны цифрами на рисунке:



Способ разрезания для любого натурального $n \ge 11$ получается из данного расширением квадрата и 3 прямоугольников вправо и вниз на $n-11$ клеток. Все размеры при этом останутся различными, так как одинаково увеличиваться будут длины, равные 6,7,8 и 9, которые и так уже больше остающихся неизменными длин 2,3,4 и 5

Критерии оценивания. Доказательство минимальности $n=11$: 3 балла. Способ разрезания для $n=11$: 2 балла. Способ разрезания для всех $n \ge 11$: ещё 2 балла. Отсутствие обоснования того, что минимальная площадь квадратика и 4 прямоугольников равна $1+a_2a_9+a_3a_8+a_4a_7+a_5a_6 \ge 1+18+24+28+30=101>10^2$: минус 1 балл.

10.4. Вне параллелограмма ABCD взята точка M такая, что угол MAB равен углу MCB и оба треугольника MAB и MCB расположены вне параллелограмма ABCD. Доказать, что угол AMB равен углу DMC.

Решение. Отметим точку P такую, что точки BPMC в таком порядке образуют параллелограмм. Тогда углы MPB и MCB= MAB равны, значит четырёхугольник APMB – вписанный. Следовательно, углы AMB и APB равны, как вписанные, опирающиеся на общую дугу AB. Заметим, что APMD тоже параллелограмм, тогда стороны AP и PB угла APB параллельны сторонам угла MD и MC угла DMC, как противоположные стороны в параллелограммах APMD и BPMC соответственно. Следовательно, углы APB=AMB и DMC равны.

Критерии оценивания.

10.5. По кругу записаны 32 числа $a_1, a_2, \dots a_{32}$, каждое из которых равно -1 или 1. За одну операцию каждое число $a_n, n=1,2,\dots,32$ заменяют на произведение a_na_{n+1} его и следующего за ним по циклу числа, при этом индексы рассматриваются циклически, $a_{33}=a_1, a_{34}=a_2$.и так далее. Докажите, что для любого начального набора чисел $a_1, a_2, \dots a_{32}$ после некоторого конечного числа операций всегда получится набор из 32 единиц. Найдите наименьшее число N операций такое, что после применения N операций из любого начального набора чисел всегда получится набор из 32 единиц.

Ответ. 32.

Решение. Покажем индукцией по n, что, если по кругу записаны 2^n чисел, то ответ задачи равен 2^n. База индукции $n=1$ рассматривается несложно: либо $\{1,-1\} \to \{-1,-1\} \to \{1,1\}$, либо $\{-1,-1\} \to \{1,1\}$, в любом случае двух операций всегда достаточно, а меньше – не всегда.

Шаг индукции. Пусть по кругу записаны 2^{n+1} чисел и утверждение верно для любых 2^n плюс-минус единиц по кругу. Рассмотрим отдельно множества A,

из 2^n чисел, стоящих на местах с нечётными индексами и В – из 2^n чисел стоящих на местах с чётными индексами, Заметим, что после выполнения двух операций каждое число $a_k, k=1,2,...32$ заменится на произведение $(a_k a_{k+1})(a_{k+1}a_{k+2}) = a_k a_{k+2}$, так как ${a_{k+1}}^2 = 1$. Отсюда следует, что, в результате выполнения двух операций на исходном множестве из 2^{n+1} чисел множества А и В меняются так, как если бы на каждом из них было выполнено по одной операции. По предположению индукции, для того, чтобы получить вместо множеств А и В множества из одних единиц, достаточно 2^n операций, следовательно, чтобы получить все единицы из исходного множества, достаточно вдвое большего числа операций, то есть $2\cdot 2^n = 2^{n+1}$ операций. Примером множества чисел, для которого необходимо ровно 2^{n+1} операций, является множество из 31 единицы и одной минус единицы. После двух операций оно даст аналогичные множества чисел А и В, для которых, по индукции, нужно ровно 2^n операций, значит для исходного множества их нужно ровно $2\cdot 2^n = 2^{n+1}$.
При количестве чисел $32 = 2^5$ число необходимых операций рано 32.
Критерии оценивания. Доказано, что 32 операций достаточно: 4 балла. Доказано, что меньше 32 операций может не хватить: 3 балла.

Всесибирская открытая олимпиада школьников по математике
Второй этап 2018-2019 г.г.
11 класс ***Каждая задача оценивается в 7 баллов***

11.1.. Какой цифрой может заканчиваться число $f(x) = [2x]+[3x]+[5x]$, где x - произвольное положительное действительное число? Здесь $[x]$ обозначает целую часть числа x, то есть наибольшее целое число, не превосходящее x.
Ответ. Любой цифрой от 0 до 7 включительно.
Решение. Обозначим $x=[x]+a$, где $0\le a<1$- дробная часть x. Тогда легко понять, что $f(x)=[2x]+[3x]+[5x]=10[x]+[2a]+[3a]+[5a]$, поэтому от целой части x последняя цифра не зависит. Рассмотрим возможные значения его дробной части, разобьём отрезок от 0 до 1 сначала на два равных полуоткрытых интервала: от 0 до 1/2. и от 1/2 до 1, на первом из них $[2a]$ равно 0. на втором 1. Аналогично, значения $[3a]$ на полуоткрытых интервалах от 0 до 1/3, от 1/3 до 2/3, от 2/3 до 1 равны 0,1 и 2 соответственно, а значения $[5a]$ на полуоткрытых интервалах от 0 до 1/5, от 1/5 до 2/5, …, от 4/5 до 1 равны 0,1,…,4 соответственно. Отсюда легко получить, что значения суммы $[2a]+[3a]+[5a]$ на восьми полуоткрытых интервалах $\left[0,\frac{1}{5}\right),\left[\frac{1}{5},\frac{1}{3}\right),\left[\frac{1}{3},\frac{2}{5}\right),\left[\frac{2}{5},\frac{1}{2}\right),\left[\frac{1}{2},\frac{3}{5}\right),\left[\frac{3}{5},\frac{2}{3}\right),\left[\frac{2}{3},\frac{4}{5}\right),\left[\frac{4}{5},1\right)$ равны соответственно 0,1,2,3,4,5,6,7.
Критерии оценивания. Доказано, что последняя цифра x зависит только от дробной части x: 2 балла. Доказано, чем оканчиваются числа $[2a],[3a]$ и $[5a]$ в

зависимости от интервала:4 балла. Только приведены примеры, когда последние цифры равны 0,1,2,3,4,5,6,7: 1 балл.

11.2..Найти все целые числа n такие, что число $15n^2-2n-1$ является степенью двойки.

Ответ. $n=3$ и $n=-1$.

Решение. Пусть n удовлетворяет условию задачи, разложим $15n^2-2n-1=(5n+1)(3n-1)$, тогда оба сомножителя $5n+1$ и $3n-1$ тоже являются степенями двойки, как легко видеть, различными и отличными от 1 и -1 при $n\neq 0,-1$. Случай $n=-1$ очевидно, подходит, а $n=0$ не подходит. Из чётности чисел $5n+1$ и $3n-1$ следует нечётность n. Сложим $5n+1$ и $3n-1$ и получим, что при $n>0$ число $8n$, а при $n<0$ число $-8n$ является суммой двух различных нееединичных степеней двойки и делится ровно на 8. Отсюда следует, что минимальная из этих степеней, совпадающая с $3n-1$ при $n>0$ или $-3n+1$ при $n<0$, равна 8, значит $n=3$ - единственное отличное от $n=-1$ решение задачи.

Критерии оценивания. Доказано, что $5n+1$ и $3n-1$ являются степенями двойки: 3 балла. Доказано, что эти степени различны и отличны от 1:1 балл. Доказано, что n нечётно: 1 балл. Доказано, что минимальная из этих степеней, совпадающая с $3n-1$, равна 8: 2 балла. Утеряно решение $n=-1$: минус 2 балла.

11.3. Найти максимальное натуральное число А такое, что при любой расстановке всех натуральных чисел от 1 до 100 включительно в ряд в некотором порядке всегда найдутся десять последовательно расположенных чисел, сумма которых не меньше А..

Ответ. 505.

Решение. Сумма всех чисел от 1 до 100 равна 5050. Разобьём 100 чисел, стоящих в ряд, на 10 отрезков по 10 чисел, очевидно, что сумма чисел в одном из отрезков не меньше 505, следовательно, А не меньше 505.

Покажем, что среди чисел, стоящих в следующем порядке: 100,1,99,2,98,3,…,51,50, нет десяти подряд идущих, сумма которых больше 505. Этим будет доказано, что А не больше 505 и, с учётом сказанного выше, что А=505.

Воспользуемся тем, что при такой расстановке все числа на нечётных местах монотонно убывают, а на чётных – монотонно возрастают, и сумма числа на нечётном месте и следующего за ним всегда равна 101. Тогда сумма любых 10 последовательных чисел, первое из которых стоит на нечётном месте всегда равна 505=5*101. Сумма отрезка из 10 последовательных чисел, первое из которых стоит на чётном, месте равна 505 минус самое правое число из тех чисел, что левее этого отрезка плюс последнее число этого отрезка. Два упомянутых числа стоят на нечётных местах, различающихся на 10, поэтому первое из них больше второго на 5, следовательно, вся сумма равна 500, что меньше 505.

Критерии оценивания. Доказательство того, что А не меньше 505: 3 балла.
Нет обоснования нижней границы А=505: –2 балла или -1 балл.
Пример, доказывающий, что А не больше 505: 4 балла.
недостаточная обоснованность примера: -2 балла.

11.4. На основании АС равнобедренного треугольника АВС взята произвольная точка М, через неё проведены прямые, параллельные боковым сторонам треугольника, пересекающие стороны АВ и ВС в точках Р и Т соответственно. Доказать, что точка Е, симметричная М относительно прямой РТ, лежит на описанной окружности треугольника АВС.

Доказательство. Обозначим за О центр описанной окружности треугольника АВС и за Н – середину основания АС. В силу симметрии считаем, что М лежит на отрезке АН.
Сначала покажем, что точка О лежит ниже, ближе к основанию, чем прямая РТ. Отрезок ВМ короче диаметра описанной окружности, поэтому расстояние от В до середины S отрезка ВТ короче радиуса описанной окружности. В силу расположения М, ВР длиннее ВТ и расстояние от В до точки пересечения РТ и ВН меньше, чем BS, следовательно, оно меньше радиуса описанной окружности, равного ВО. Значит, О лежит ниже РТ.
Докажем сначала, что треугольники АРО и ВТО равны. В силу построения АР=РМ, как боковые стороны равнобедренного треугольника АРМ и РМ=ВТ, как противоположные стороны параллелограмма МРВТ, поэтому АР=ВТ. Стороны ОА и ОВ равны, как радиусы описанной окружности треугольника АВС. В равнобедренном треугольнике АОВ угол ОАР=ОАВ равен .90 минус половину угла АОВ, который, как центральный, равен удвоенному вписанному углу С. Следовательно, угол ОАР равен 90-С, что, очевидно, равно углу ОВТ=ОВС=90-С из прямоугольного треугольника СВН. Значит, треугольники АРО и ВТО равны по двум сторонам ОА=ОВ и АР=ВТ и углу ОАР=ОВТ между ними. В частности, отсюда следует равенство отрезков ОР и ОТ.
Теперь покажем, что и треугольник ОРЕ равен треугольнику ОТВ, откуда будет следовать равенство сторон ОЕ и ОВ и принадлежность точки Е описанной окружности треугольника АВС. Действительно, по построению РЕ=РМ=РА=ВТ и ОР=ОТ по только что доказанному. По построению угол ТРЕ равен углу ТРМ, который равен углу РТВ в параллелограмме МРВТ. Равенство углов ОРТ и ОТР следует из равнобедренности треугольника ОРТ. Теперь из равенств углов ОРЕ=ОРТ+ТРЕ=ОТР+РТВ=ОТВ следует равенство треугольников ОРЕ и ОТВ

Критерии оценивания. Доказано равенство ОР и ОТ: 3 балла. Не доказано, что О лежит ниже РТ: минус 1 балл.

11.5. Последовательность положительных действительных чисел $a_n, n=1,2,3,\ldots$ такова, что $a_n^2 < a_n - a_{n+1}$. Докажите, что $a_n < \frac{1}{n}$ для всех $n = 1,2,3,\ldots$

Доказательство. Запишем неравенство $a_n^2 < a_n - a_{n+1}$ в виде $a_{n+1} < a_n - a_n^2$. Квадратичная функция $f(x) = x - x^2$ положительна при $0 < x < 1$, поэтому из положительности a_{n+1} следует $0 < a_n < 1$ при всех $n = 1,2,3,\ldots$, в частности, и при $n = 1$. Это доказывает утверждение задачи в случае $n = 1$.
Максимальное значение функции $f(x) = x - x^2$ на интервале $0 < x < 1$ равно ¼ при $x = \frac{1}{2}$, поэтому $a_n \le \frac{1}{4}$ при всех $n = 2,3,\ldots$,. Это доказывает, в частности, утверждение задачи для $n = 2,3,4$.
Далее воспользуемся методом математической индукции, в качестве базы индукции используем уже доказанные случаи $n = 1,2,3,4$. Пусть утверждение задачи выполнено для $a_n, n > 2$. На интервале $0 < x < a_n < \frac{1}{n} < \frac{1}{2}$ функция $f(x) = x - x^2$ монотонно возрастает, следовательно $a_{n+1} < a_n - a_n^2 = f(a_n) < f(\frac{1}{n}) = \frac{1}{n}(1 - \frac{1}{n}) = \frac{n-1}{n^2} < \frac{1}{n+1}$, что доказывает справедливость шага индукции.
Критерии оценивания. Доказано неравенство $0 < a_n < 1$: 1 балл.. Доказано неравенство $a_n \le \frac{1}{4}$: 2 балла. Сделан шаг индукции: 4 балла.